Table of Contents

مقدمه مولف:

این جزوه آموزشی در آبانماه 1399 تکمیل شده است و شامل مباحث هندسه آزمون یوس میشود.

قضایا و نکات به خوبی تشریح شده اند و بعضا اثبات آنها آمده است. این کمک میکند تا داوطلب با انبوهی از مباحث و قضایای حفظی مواجه نباشد بلکه درک عمیقی از قضایا داشته باشد که همین نکته، کمک قابل توجهی به خلاقیت داوطلب در حل مسائل جدید میکند.

برای داوطلبانی که قصد گرفتن نمره کامل در آزمون یوس را دارند، پیشنهاد میشود سوالات فصل 15 که سوالاتی متفرقه از آزمون های یوس هست را مطالعه و حل کنند.

از آنجایی که هیچ کاری بی ایراد نیست از خواننده درخواست میشود ایرادات و اشکالات احتمالی این جزوه را از طریق ایمیل mirabieducenter@gmail.com با ما در میان بگذارد.

عماد میرابی

آبانماه 1399

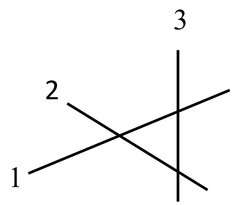
Chapter 1 – Geometry concepts and angle

Point: a concept which has position in space, but not size.

Line: A set of points unbounded through both directions.

Plane: صفحه به کمک سه نقطه ای که روی یک خط راست نیستند تعریف میشود.

نکته 1: n خط صفحه را حداقل به $n+1$ قسمت و حداکثر به $\frac{n(n+1)}{2}+1$ قسمت تقسیم می کند.



اثبات: n خط موازی، $n+1$ ناحیه در صفحه ایجاد می کند.

برای ساختن حداکثر تعداد نواحی در صفحه می توان این الگو را در پیش گرفت.

خط اول دو ناحیه می سازد.

خط دوم، 2 ناحیه اضافه می کند.

خط سوم حداکثر 3 ناحیه اضافه می کند و ...

تعداد خطوط	1	2	3	4	...	n
حداکثر مقدار نواحی	2	4	7	11	...	$\frac{n(n+1)}{2}+1$

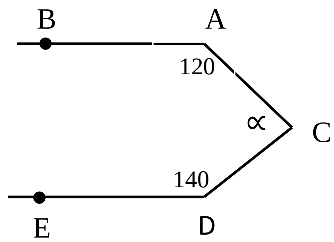
با توجه به اطلاعاتی که از دنباله مثلثی داریم، این دنباله مثلثی است که یک واحد جابجا شده است.

Example 1) 46 regions in a plane is made with at least. How many lines?

Solution: $\frac{n(n+1)}{2}+1=46 \implies \mathrm{n}=9$

Ray	نیم خط	Bisector	نیمساز
Line	پاره خط	Opposite angles	زوایای متقابل به راس
Adjacent angle	زوایای مجاور	Acute angle	زاویه حاده
Straight angle	زاویه نیم صفحه	Right angle	زاویه قائمه
Complementary angles	زوایای متمم	Obtuse angle	زاویه منفرجه
Transversal	خط مورب	Supplementary angles	زوایای مکمل

Example 7)



$AB \parallel DE$

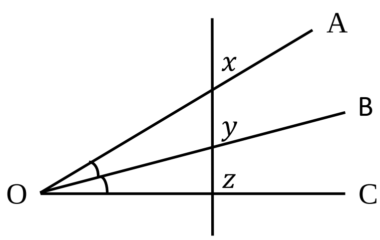
$\propto = ?$

راه حل اول: از C خط CF را موازی AB و DE رسم می کنیم تا ∝ را به دو قسمت کند.

با بکار بردن متوالی قضیه خطوط موازی و مورب $A\hat{C}F = 60$ و $D\hat{C}F = 40$ لذا $\propto = 100$

راه حل دوم: از B خطی عمود بر AB رسم کرده و مجموع زوایای داخلی پنج ضلعی بدست امده را 540 می گذاریم.

نکته 5)



$$\angle AOB = \angle BOC$$

$$\Rightarrow \frac{x+z}{2} = y$$

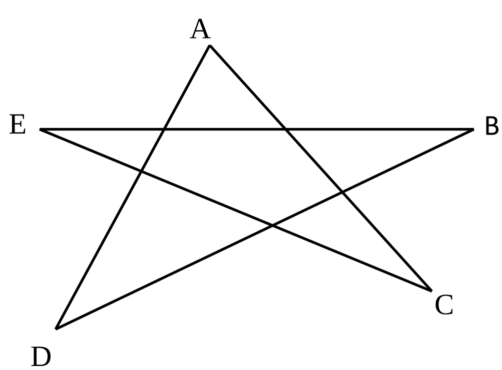
اثبات) اگر $\angle AOB = \propto$ و نقاط تلاقی خط که به ترتیب زوایای z, y, x ایجاد کرده را F, E, D نامگذاری کنیم،

زاویه y زاویه خارجی مثلث ΔDEO است پس $y = x + \propto$

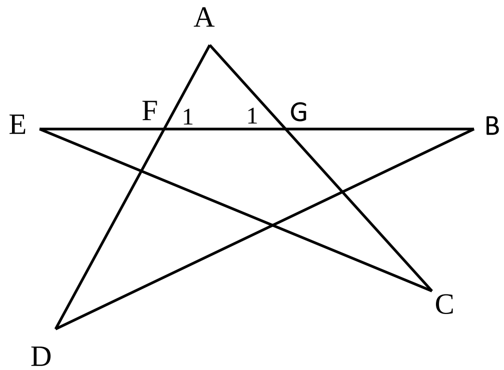
زاویه z زاویه خارجی مثلث ΔEFO است پس $z = y + \propto$

$$\Rightarrow z = x + 2\propto \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{matrix} z + x = 2x + 2\propto \\ y = x + \propto \end{matrix}\right\} \; y = \frac{x+z}{2}$$

نکته 6)



$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} + \hat{E} = 180$$



اثبات: زاویه F_1 زاویه خارجی در مثلث FDB است

پس $\hat{F}_1 = \hat{D} + \hat{B}$

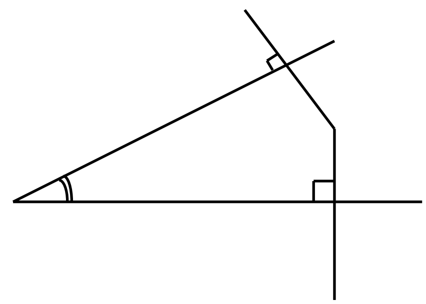
زا ویه G_1 زاویه خارجی در مثلث EGC است و لذا

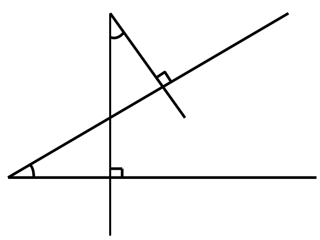
$G_1 = \hat{E} + \hat{C}$. از طرفی جمع زوایای داخلی مثلث AFG،

180 درجه است پس $\hat{A} + \hat{F}_1 + \hat{G}_1$

در نتیجه $A + D + B + E + C = 180$

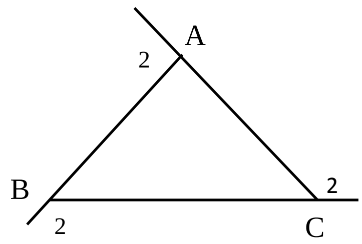
نکته 7) اگر دو ضلع زاویه ای بر دو ضلع زاویه ای دیگر عمود باشند، آن زوایا یا مساوی اند یا مکمل.





مشروح نکات و قضایا در نسخه کامل فایل هست

Chapter 2 – Angles in triangle



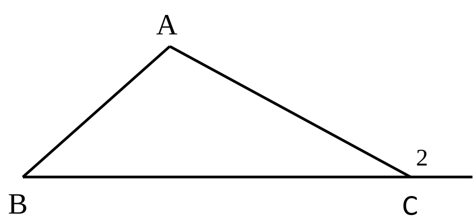
نکته 1: مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180 درجه است.

نکته 2: مجموع زوایای خارجی هر مثلث 360 درجه است.

$$\hat{A}_2 + \hat{B}_2 + \hat{C}_2 = 360$$

نکته 3: قضیه زاویه خارجی: هر زاویه خارجی مثلث برابر است با مجموع زوایای داخلی غیرمجاور آن.

The measure of an exterior angle of a triangle is equal to the sum of the measures of the two remote interior angles.

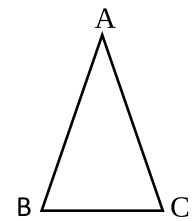


$$\hat{C}_2 = \hat{A} + \hat{B}$$

Interior angle	زاویه داخلی	Height (altitude)	ارتفاع
Exterior angle	زاویه خارجی	Bisector	نیمساز
Scalene triangle	مثلث مختلف الاضلاع	Median	میانه
Right angle	مثلث قائم الزاویه	Perpendicular bisector	عمود منصف
Obtuse angle	مثلث منفرجه	Hypotenuse	وتر مثلث قائم الزاویه
Isosceles angle	مثلث متساوی الساقین	Center of gravity	مرکز ثقل
Equilateral angle	مثلث متساوی الاضلاع	Internally tangent circle	دایره محاطی

Isosceles angle: a triangle in which length of two sides are equal.

In the isosceles triangle shown, the median, bisector and altitude through vertex A are all the same.



Equilateral triangle: a triangle in which length of all sides are equal.

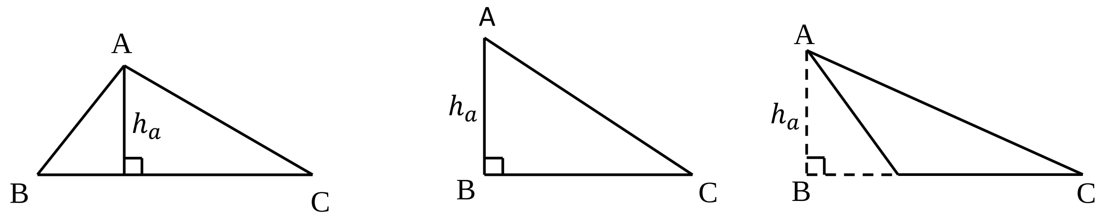
Each angle of an equilateral is 60.

نکته 4: در مثلث قائم الزاویه میانه وارد بر وتر نصف وتر است.

In a right triangle, the length of median on the hypotenuse is half of the length of hypotenuse.

اثبات: می دانیم در مستطیل قطرها برابرند و همدیگر را نصف می کنند. لذا اگر نیمی از مستطیل را درنظر بگیریم حکم اثبات شده است.

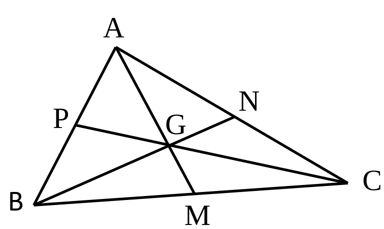
Height: the altitude of a triangle is a line segment drawn from one vertex perpendicular to the opposite side. We use ha for the height of side BC.



Median: the median of a triangle is a line segment drawn from each vertex to the midpoint of opposite side.

In every triangle medians intersect in the interior area, and the point is called the center of gravity of the triangle.

نکته 4: در هر مثلث میانه ها همرسند و مرکز ثقل میانه را به نسبت 1 و 2 قطع می کند.



$\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{GM}} = 2$ $\qquad$ $\frac{\mathrm{BG}}{\mathrm{GN}} = 2$ $\qquad$ $\frac{\mathrm{PG}}{\mathrm{CQ}} = \frac{1}{2}$

مشروح نکات و قضایا به همراه اثبات اکثرآنها در نسخه کامل فایل هست

Chapter 3 – The Auxiliary elements in a triangle

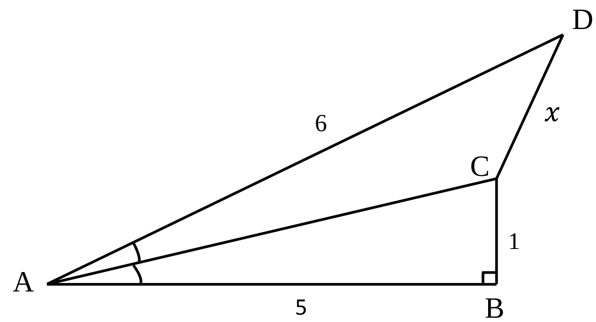
نکته 1: نیمساز یک زاویه مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله اند.

Example 1)

$\angle \mathrm{ABC} = 90$

AC is bisector

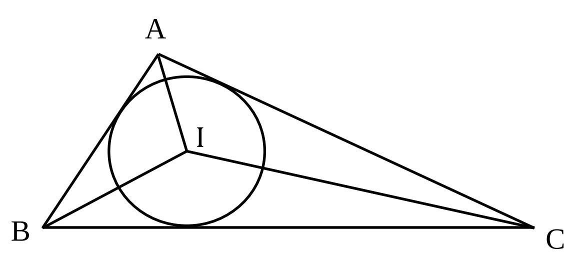
$\mathrm{CD} = \mathrm{x} = ?$



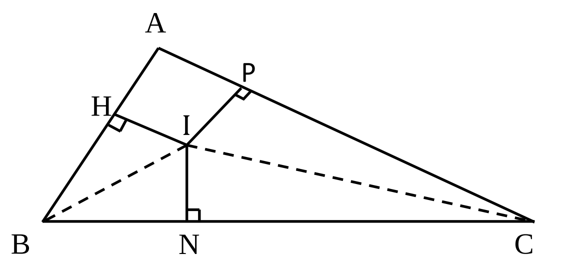
راه حل: از C عمود CE را بر AD رسم می کنیم. مثلث های ACB, ACE هم نهشت هستند پس $AE = 5$ و $CE = 1$ لذا $ED = 1$ به کمک رابطه فیثاغورث $CD = \sqrt{2}$.

نکته 2: نیمسازهای داخلی هر مثلث همرسند. این نقطه مرکز دایره محاطی مثلث است.

زیرا این نقطه از سه ضلع مثلث به یک فاصله است.



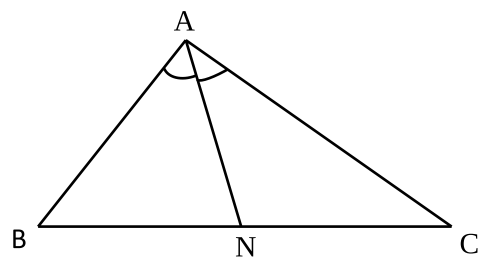
اثبات: نیمسازهای داخلی زوایای C, B را رسم می کنیم تا همدیگر را در I قطع کنند



$$\left.\begin{array}{l} \text{I روی نیمساز زاویه} \hat{B} \text{ است} \Rightarrow \mathrm{IN} = \mathrm{IH} \\ \text{〃} \ \hat{C} \ \text{〃 〃 〃} \ \mathrm{I} \Rightarrow \mathrm{IN} = \mathrm{IP} \end{array}\right\} \Rightarrow IP = IH$$

نقطه I از دو ضلع زاویه $\widehat{\mathrm{A}}$ به یک فاصله است لذا حتما روی نیمساز این زاویه قرار دارد. لذا نقطه I *نقطه* همرسی نیمسازهای مثلث است و نیمسازهای داخلی هر مثلث همرسند.

نکته 3) نیمساز داخلی مثلث، ضلع مقابل را به نسبت اضلاع مجاور قطع می کند. (قضیه نیمساز داخلی)

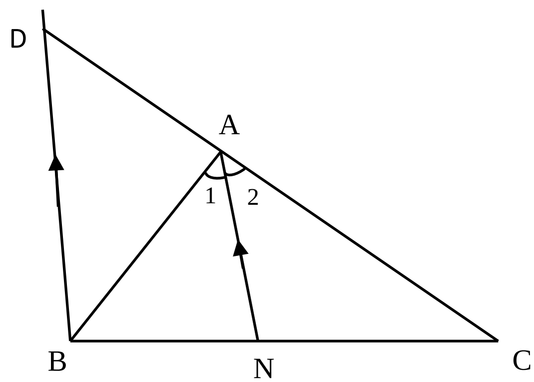


$$\frac{BN}{NC}=\frac{AB}{AC}$$

اثبات 1: $\frac{BN}{CN}=\frac{S_{ABN}}{S_{ACN}}$ حال اگر از N بر اضلاع AC, AB عمود کنیم و نقاط تلاقی را F, E بنامیم

$$\frac{S_{ABN}}{S_{ACN}}=\frac{\frac{NE\times AB}{2}}{\frac{NF\times AC}{2}}=\frac{NE\times AB}{NF\times AC}$$

ولی چون N روی نیمساز زاویه $\widehat{A}$ است پس $NE=NF$ لذا $\frac{AB}{AC}=\frac{S_{ABN}}{A_{ACN}}$



اثبات 2: از B موازی NA رسم کرده تا ادامه CA را در نقطه D قطع کند.

$$\left.\begin{matrix}AN \parallel DB\\ \text{مورب } AB\end{matrix}\right\} \rightarrow \widehat{A}_1=A\widehat{B}D$$

$$\left.\begin{matrix}AN \parallel DB\\ \text{مورب } AD\end{matrix}\right\} \rightarrow \widehat{A}_2=A\widehat{D}B$$

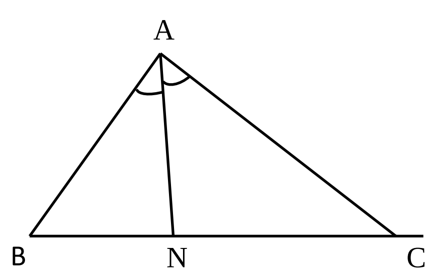
$$\widehat{A}_1=\widehat{A}_2 \Rightarrow A\widehat{D}B=A\widehat{B}D \Rightarrow AD=AB$$

حالا در مثلث DBC که خط AN موازی یک ضلع آن رسم کرده اگر قضیه تالس را بنویسیم:

$$\frac{CA}{AD}=\frac{CN}{NB}\Rightarrow\frac{CA}{AB}=\frac{CN}{NB}$$

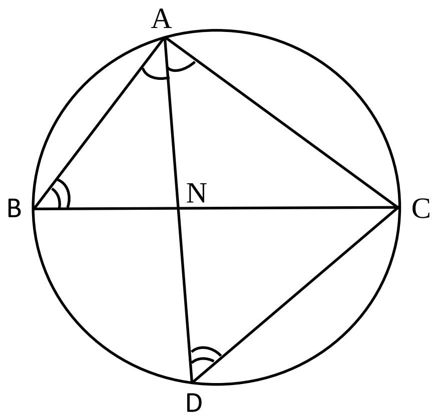
* یادگیری و درک اثبات های این جزوه کمک می کند تا داوطلب حداقل مطالب ممکن را حفظ کند و در مسائل گوناگون با دست باز اقدام کند.

نکته 4: رابطه طولی حاکم بر نیمساز داخلی



$$AN^2=AB\times AC-BN\times NC$$

اثبات: دایره محیطی مثلث ABC را رسم کرده و نیمساز AN را ادامه می دهیم تا دایره را در D قطع کند.



$$\Delta\, ABN \sim \Delta\, ADC \Rightarrow \frac{AB}{AN} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow AD \times AN = AB \times AC$$

$$\Delta\, ABN \sim \Delta\, DNC \Rightarrow \frac{AN}{BN} = \frac{CN}{ND} \Rightarrow AN \times ND = BN \times CN$$

از تفریق دو رابطه طولی بالا، حکم اثبات می شود.

Example 2) find the length of the interior bisector

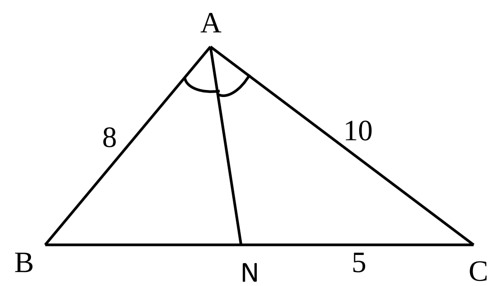
CN = 5

AN is bisector

AC = 10

AB = 8

AN =?



راه حل: به کمک نکته 3 داریم: $\frac{AB}{AC} = \frac{BN}{NC}$ پس $BN = 4$

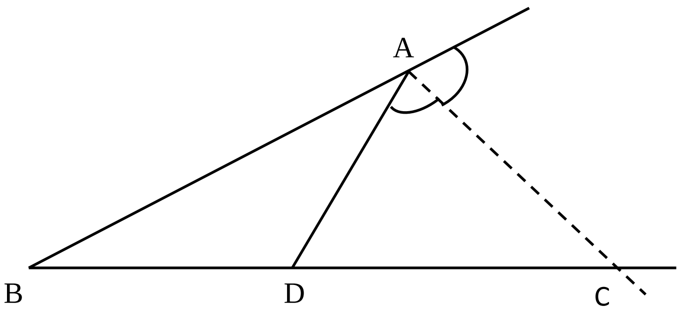
حالا به کمک نکته 4 طول نیمساز داخلی را محاسبه می کنیم

$AN^2 = AB \times AC - BN \times NC$

$= 8 \times 10 - 4 \times 5$
$= 80 - 20$
$= 60$
$\Rightarrow AN = 2\sqrt{15}$

The exterior angle bisector theorem

نکته 5: قضیه نیمساز خارجی

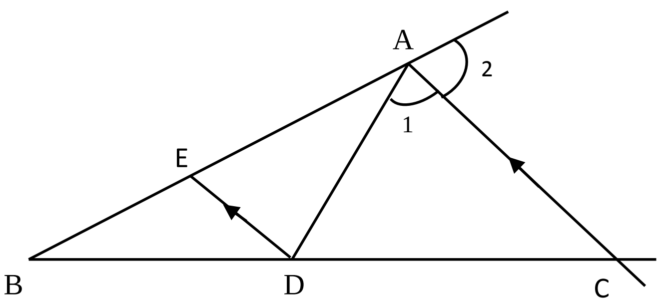


$$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{CD}$$

* این قضیه را می توان اینطور به خاطر سپرد که ، بدون توجه به شکل، اگر AD نیمساز زاویه $\widehat{A}$ باشد

رابطه طولی $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$ حاکم است مستقل از اینکه AD نیمساز داخلی یا خارجی باشد.

اثبات: از C موازی DA رسم کرده تا AB را در E قطع کند.



$$\left.\begin{array}{r} EC \parallel AD \\ \text{مورب } AC \end{array}\right\} \Rightarrow A\widehat{C}E=\widehat{A}_1$$

$$\left.\begin{array}{r} EC \parallel AD \\ \text{مورب } AE \end{array}\right\} \Rightarrow A\widehat{E}C=\widehat{A}_2$$

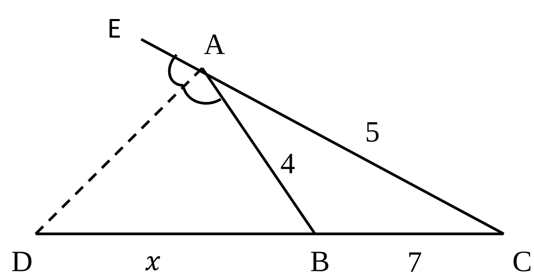
$$\widehat{A}_1=\widehat{A}_2 \Rightarrow A\widehat{C}E=A\widehat{E}C \Rightarrow AE=AC$$

حال در مثلث BAD، که EC موازی یک ضلع آن رسم شده است می توان قضیه تالس و تعمیم آن را پیاده کرد لذا:

$$\frac{EA}{BA}=\frac{CD}{BD}\Rightarrow\frac{CA}{BA}=\frac{CD}{BD}$$

Example 3)

$$B\widehat{A}D=D\widehat{A}E$$
$$AB=4$$
$$AC=5$$
$$BC=7$$
$$BD=x=?$$

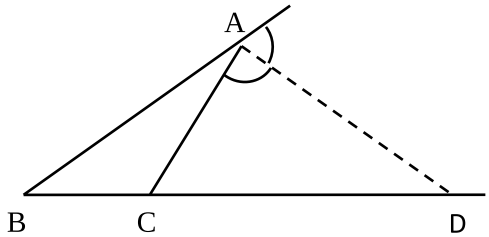


راه حل: به کمک قضیه نیمساز خارجی می توان نوشت:

$$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$$

$$\frac{4}{5} = \frac{x}{x+7} \Rightarrow x = 28$$

نکته 6: رابطه طولی حاکم بر نیمساز خارجی



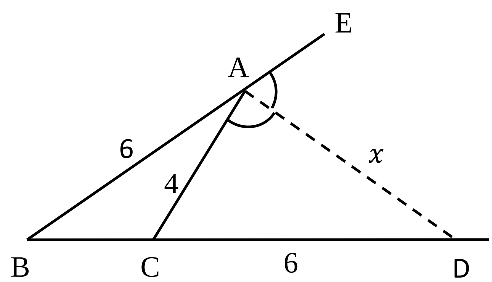
$$AD^2 = BD \times DC - AB \times AC$$

یکی از اثبات هایی که می توان برای این رابطه طولی ارائه داد، کمک گرفتن از رابطه طولی نیمساز داخلی و سپس قضیه فیثاغورث است (چون نیمسازهای داخلی و خارجی بر هم عمودند)ولی به علت طولانی بودن از ارائه آن چشم پوشی می کنم.

توجه شما را به حل مثال 4 جلب می کنم که بدون استفاده از این فرمول مسئله حل شده است.

Example 4)

$$D\hat{A}E = C\hat{A}D$$
$$AB = 6$$
$$AC = 4$$
$$CD = 6$$
$$AD = x = ?$$



راه حل: ابتدا به کمک قضیه نیمساز خارجی طول BC را محاسبه می کنیم

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow \frac{6}{4} = \frac{a+6}{6} \Rightarrow a = 3$$

حال اگر نیمساز داخلی AN را رسم کنیم خواهیم داشت

$$\left.\begin{matrix} \frac{BN}{NC} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \\ BN + NC = 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow BN = \frac{3}{5} \times 3 = \frac{9}{5}$$

$$CN = \frac{2}{5} \times 3 = \frac{6}{5}$$

حال به کمک رابطه طولی نیمساز داخلی، طول نیمساز داخلی را محاسبه کرده و در نهایت رابطه فیثاغورث را اعمال می کنیم.

$$\left.\begin{matrix} AN^2 = 6 \times 4 - \frac{9}{5} \times \frac{6}{5} = \frac{546}{25} \\ AD^2 = (6 + \frac{6}{5})^2 = \frac{1296}{25} \end{matrix}\right\} \Rightarrow AD^2 = \frac{750}{25} = 30$$

$$AD = \sqrt{30}$$

نکته 7: نیمسازهای داخلی و خارجی هر راس بر هم عمودند.

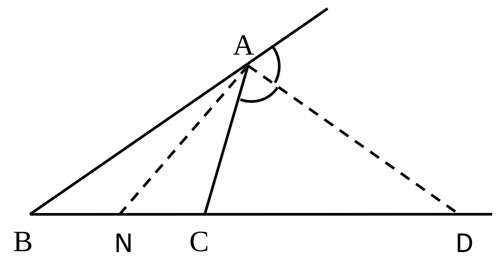
Example 5) AN is interior bisector

AD is exterior 〃

$\mathrm{AN} = 3$

$\mathrm{AD} = 4$

$\mathrm{ND} = ?$



راه حل: مثلث AND قائم الزاویه است لذا $ND = 5$

Chapter 4 – special triangles

Chapter 5 – Similarity and Area in Triangles

Chapter 6 – Angle - Side relations in triangle

Chapter 7 – Polygons and Quadrilaterals

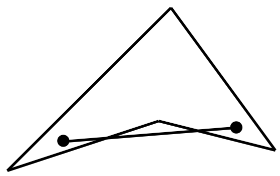
Convex polygon	چندضلعی محدب	Quadrilateral	چهارضلعی
Concave polygon	چند ضلعی مقعر	Parallelogram	متوازی الاضلاع
Diagonal	قطر	Trapezoid	ذوزنقه
Interior angle	زاویه داخلی	Square	مربع
Exterior angle	زاویه خارجی	Rectangle	مستطیل
Kite(Deltoid)	کایت		

چند ضلعی محدب: چند ضلعی که هر زاویه داخلی آن کمتر از 180 درجه باشد.

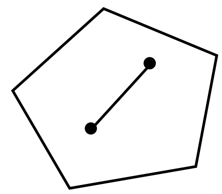
Convex Polygon: each interior angle is less than 180.

شکل محدب: شکلی است که هر دو نقطه دلخواه داخل آن را به هم وصل کنیم آن پاره خط تماما داخل شکل بیافتد.

Convex shape: is a shape that, if a line segment is formed by connecting every tow point in this shape, the line segment lies entirely inside the shape.



Concave Polygon



Convex Polygon

Exterior angle: is the adjacent supplementary of the interior angle

زاویه خارجی: مکمل و مجاور (مجانب) یک زاویه داخلی است.

Diagonal: straight line segment joining every two nonadjacent vertices in a polygon.

نکته 1: مجموع زوایای داخلی هر n ضلعی برابر است با $(n-2)\times 180$

نکته 2: مجموع زوایای خارجی هر n ضلعی محدب برابر است با 360

نکته 3: تعداد قطرهای یک n ضلعی محدب برابر است با $\binom{n}{2}-n=\frac{n(n-3)}{2}$

نکته 4: از هر راس یک n ضلعی محدب $n-3$ قطر می توان رسم کرد که این قطرها n ضلعی را به $n-2$ مثلث تقسیم می کنند.

چند ضلعی منتظم: چند ضلعی که همه اضلاع و زوایای آن برابر باشند.

نکته 5: هر زوایه خارجی یک n ضلعی منتظم $\frac{360}{n}$ است.

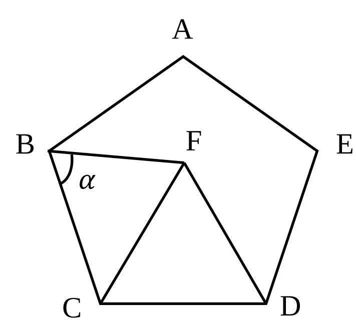
نکته 6: هر زاویه داخلی یک n ضلعی منتظم $\frac{(n-2)180}{n}$ است.

Example 1) ABCDE is a regular pentagon

$AB=CF$

$\angle FDE=38°$

$\propto=?$



راه حل: $CF=CD$ پس مثلث CFD متساوی الساقین است.

$$C\widehat{D}E=108 \ \Rightarrow\ \angle FDC=70\ \Rightarrow\ F\hat{C}D=40\ \Rightarrow\ \angle BCF=68$$

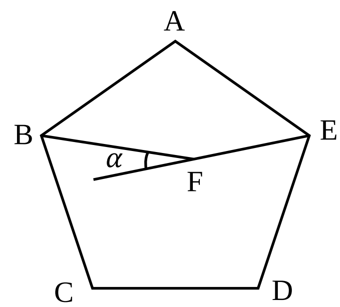
و مثلث BCF هم متساوی الساقین است، پس

$$\angle FBC=\frac{180-68}{2}=56$$

Example 2) ABCDE is a regular pentagon

BF, EF are bisectors

$\alpha =?$



راه حل: به کمک مجموع زوایای داخلی چهار ضلعی ABFE که 360 درجه است زاویه BFE محاسبه می شود.

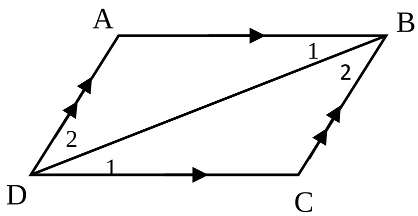
$\angle BFE = 360 - (108 + 54 + 54) = 144$

$\Rightarrow \alpha = 36$

Chapter 8 – Parallelogram and equilateral quadrangles

چهارضلعی که اضلاع مقابل آن دو بدو موازی باشند را متوازی الاضلاع گویند.

A quadrangle which its opposite sides are parallel, is called a parallelogram.



نکته 1: در متوازی الاضلاع اضلاع مقابل برابرند.

اثبات:

$$\left.\begin{array}{r} AB \parallel CD \\ \text{مورب } BD \end{array}\right\} \rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{D_1}$$

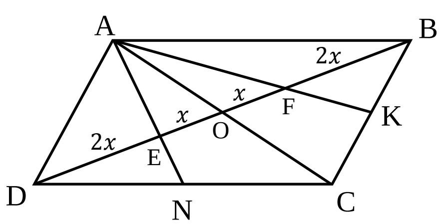
$$\left.\begin{array}{r} AD \parallel BC \\ \text{مورب } BD \end{array}\right\} \rightarrow \widehat{B_2} = \widehat{D_2}$$

$$\left.\begin{array}{r} \widehat{B_1} = \widehat{D_1} \\ BD = BD \\ \widehat{B_2} = \widehat{D_2} \end{array}\right\} \rightarrow (\text{ز ض ض})\,\Delta ABD \cong \Delta BDC \Rightarrow \begin{array}{l} AB = CD \\ AD = BC \end{array}$$

نکته 2: در متوازی الاضلاع زوایای مقابل برابرند و زوایای مجاور مکمل اند.

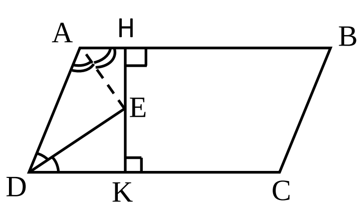
نکته 3: در متوازی الاضلاع قطر ها همدیگر را نصف می کنند.

نکته 4: در متوازی الاضلاع ABCD



$$\left.\begin{array}{r} DN = NC \\ BK = KC \end{array}\right\} \rightarrow AE = EF = FB = 2EO$$

اثبات: در مثلث ADC، نقطه E مرکز ثقل مثلث است (محل برخورد میانه ها) پس $\frac{EO}{DE} = \frac{1}{2}$

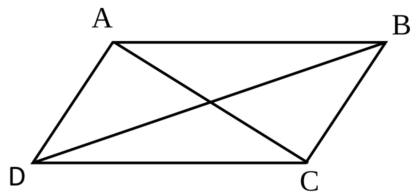


نکته 5: در متوازی الاضلاع ABCD، اگر نیمسازهای زوایای A و D همدیگر را در E قطع کنند نقطه E از اضلاع AB و DC به یک فاصله است.

اثبات: از E عمود EN را بر ضلع AD رسم می کنیم.

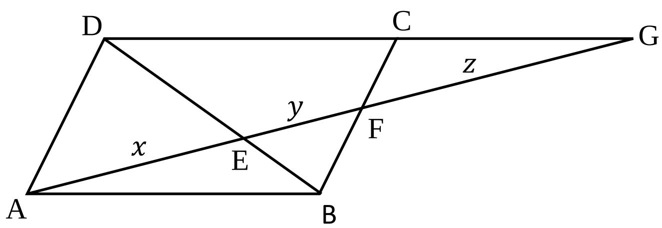
E روی نیمساز زاویه A است $\rightarrow EH = EN$
″ D ″ ″ ″ ″ $\rightarrow EN = EK$
$\rightarrow EH = EK$

نکته 6: در هر متوازی الاضلاع مجموع مجذور قطرها، دو برابر مجموع مجذور دو ضلع مجاور است.



اثبات: به کمک قضیه کسینوس ها داریم:

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \times AD \times \cos\hat{A}$$
$$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2AD \times DC \times \cos\widehat{D}$$
جمع $\rightarrow AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2)$



نکته 7:

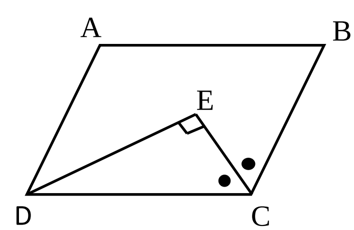
$$x^2 = y(y+z)$$

اثبات:

$$\Delta\, ABE \sim \Delta\, DEG \Rightarrow \frac{BE}{DE} = \frac{x}{y+z}$$

$$\Delta\, ADE \sim \Delta\, BEF \Rightarrow \frac{BE}{DE} = \frac{y}{x}$$
$$\Rightarrow \frac{x}{y+z} = \frac{y}{x}$$

Example 1) CE id bisector



$\angle CED = 90°$

$\angle ADE = 2x - 10$

$\angle EDC = 3x - 40$

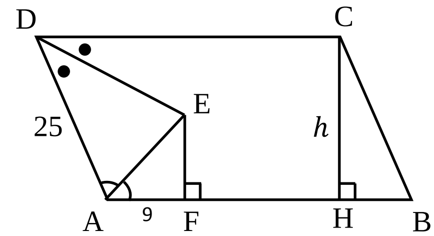
$\Rightarrow$ x =?

راه حل: زوایای مجاور در هر متوازی الاضلاع مکمل اند پس نیمسازهای زوایای مجاور بر هم عمودند لذا DE نیمساز زاویه D هم هست.

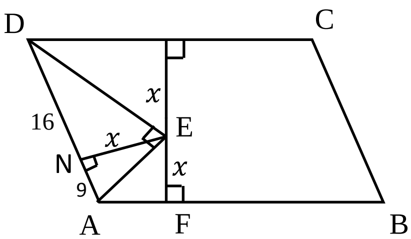
$2x - 10 = 3x - 40$

$30 = x$

Example 2) ABCD is a parallelogram
AF=9
AD=25
AE, DE are bisectors
h=?

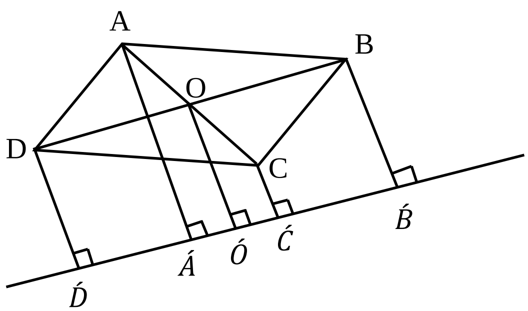


راه حل: از E عمود EN را بر ضلع AD رسم می کنیم AN=9 و DN=16



در مثلث قائم الزاویه DEA به کمک روابط طولی، طول ارتفاع وارد بر وتر را محاسبه می کنیم.

$$x^2 = 16 \times 9$$
$$x = 4 \times 3 = 12$$
$$h = 24$$



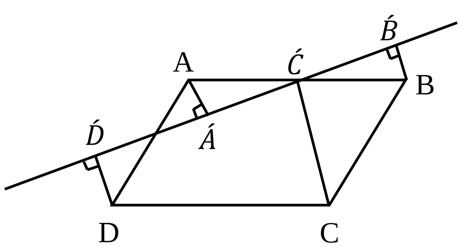
نکته 8:

$$A\acute{A} + C\acute{C} = B\acute{B} + D\acute{D}$$
$$= 2O\acute{O}$$

اثبات: در ذوزنقه $D\acute{D}\acute{B}B$ اگر وسط ساق ها را به هم وصل کنیک پاره خط حاصل میانگین طول دو قاعده می شود.

$$O\acute{O} = \frac{B\acute{B} + D\acute{D}}{2}$$

در ذوزنقه $AA\acute{C}C$ هم به همین ترتیب.



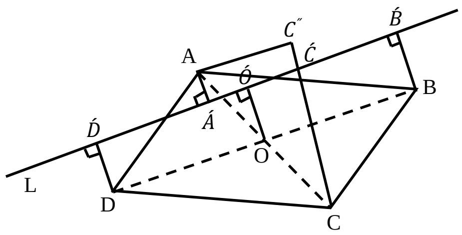
نکته 9:

$$B\acute{B} + D\acute{D} = C\acute{C} - A\acute{A}$$

اثبات:

$$D\acute{D} + B\acute{B} = 2\,O\acute{O}$$

چون $O\acute{O}$ پاره خطی است که وسط ساقهای ذوزنقه $D\acute{D}\acute{B}B$ را به هم وصل می کند.



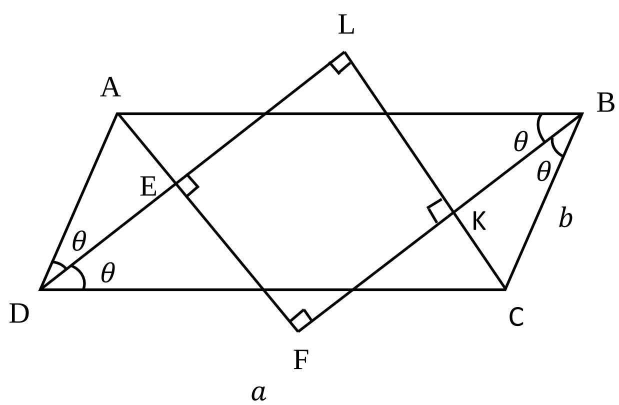
از A موازی با خط l رسم می کنیم تا امتداد $C\acute{C}$ را در C'' قطع کند.

در مثلث ACC'' از وسط ضلع AC به موازات قاعده رسم شده است.

$$O\acute{O} \parallel C\acute{C}$$

$$O\acute{O} + A\acute{A} = \frac{1}{2}CC''$$
$$= \frac{1}{2}(C\acute{C} + A\acute{A})$$
$$\Rightarrow O\acute{O} = \frac{1}{2}(C\acute{C} - A\acute{A})$$

نکته 10: از رسم نیمسازهای داخلی متوازی الاضلاع، یک مستطیل بوجود می آید و اندازه قطر این مستطیل برابر با تفاضل اضلاع مجاور متوازی الاضلاع است.



$$EK = (a - b)$$

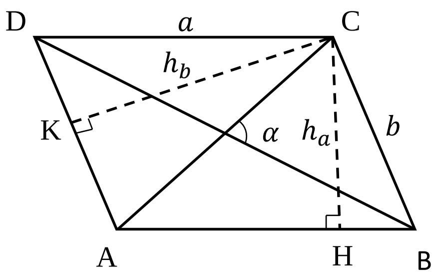
اثبات: زوایای مجاور در متوازی الاضلاع مکمل اند لذا نیمسازهای زوایای مجاور با هم زوایه 90 درجه می سازند پس چهارضلعی ELKF مستطیل است.

$$\left.\begin{array}{ll}\Delta\, DCL: & CL = a\sin\theta \\ \Delta\, CKB: & CK = b\sin\theta\end{array}\right\} \to LK = (a-b)\sin\theta$$

$$\Rightarrow \mathrm{EK} = \mathrm{a} - \mathrm{b}$$

$$\left.\begin{array}{ll}\Delta\, DCL: & DL = a\cos\theta \\ \Delta\, ADL: & DE = b\cos\theta\end{array}\right\} \to LE = (a-b)\cos\theta$$

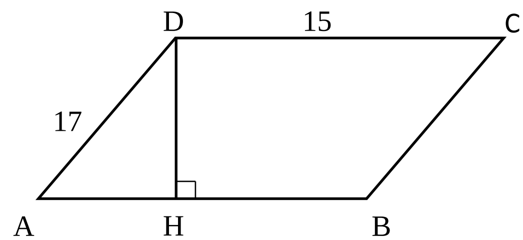
نکته 11:



$$area = ah_a = bh_b$$
$$area = \frac{1}{2} AC \times BD \times \sin\alpha$$
$$area = ab\sin\hat{C}$$

Example 3)

DH ⊥ AB
DC=15
AD=17
BH=7
$area\ of\ ABCD$?



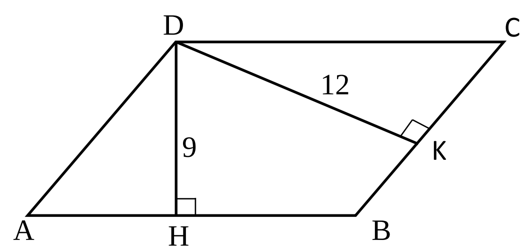
راه حل: AH=8 و به کمک سه تایی های فیثاغورثی (نوشتن رابطه فیثاغورث)

$DH = 15$

$\Rightarrow \text{area} = \text{DH} \times \text{DC} = 15 \times 15 = 225$

Example 4)

DH ⊥ AB
DK ⊥BC
DK =12
DH =9
AB+AD=28
$area\ of\ ABCD =$?

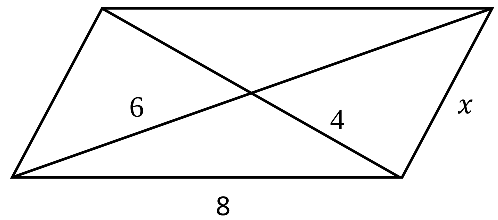


راه حل:

$$\left.\begin{array}{r} 9 \times AB = 12 \times AD \rightarrow \dfrac{AB}{AD} = \dfrac{4}{3} \\ AB + AD = 28 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} AB = 16 \\ AD = 12 \end{array}$$

$area = 9 \times 16 = 144$

Example 5) Find x in the figure.
The quadrilateral is a parallelogram.



:راه حل

$12^2 + 8^2 = 2(8^2 + x^2)$

$144 + 64 = 64 + 64 + 2x^2$

$80 = 2x^2 \rightarrow x^2 = 40 \rightarrow x = 2\sqrt{10}$

Chapter 9 – Rectangle and Square

Chapter 10 – Trapezoid and Deltoid (kite)

Chapter 11 – Length and Angle in a Circle

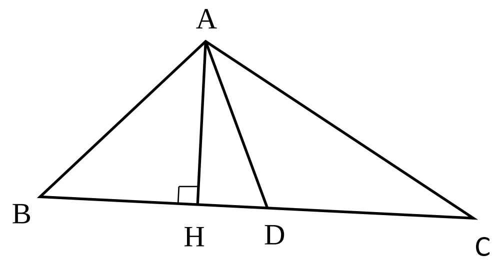
Chapter 12- Power, Circumference and area in a Circle

Chapter13- Circle in Analytical Geometry

Chapter 14- Vectors

Chapter 15 - Miscellaneous Question with answer

Example 1) $DC = 2BH$
$\angle ABC = 50$
$\angle C = 25$
$\angle HAD = ?$

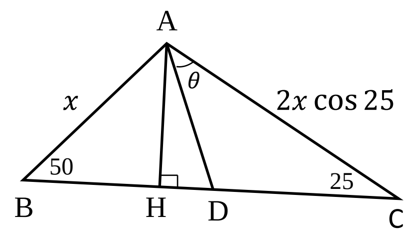


Solution: $AB = x$

Since rule in $\Delta\, ABC \Rightarrow \dfrac{x}{\sin 25} = \dfrac{AC}{\sin 50}$

$\Rightarrow AC = 2x\ \cos 25$

$since\ rule\ in\ \Delta\, ADC \Rightarrow \dfrac{DC}{\sin\theta} = \dfrac{AC}{\sin(\theta + 25)}$

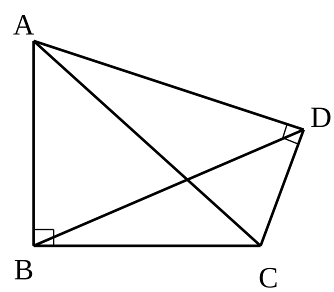


$BH = x\ \cos 50$
$DC = 2x\ \cos 50$ $\quad \Rightarrow \dfrac{2x \cos 50}{\sin\theta} = \dfrac{2x \cos 25}{\sin(\theta + 25)}$

$\Rightarrow \dfrac{\sin\theta}{\sin(\theta + 25)} = \dfrac{\sin 40}{\sin 65} \Rightarrow \theta = 40$

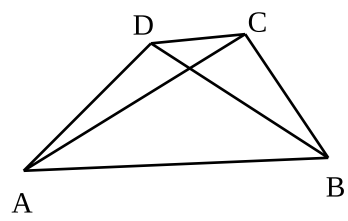
$\Rightarrow H\hat{A}D = 25$

Example 2) $AB = BC$
$BD = 6\sqrt{2}$
$DC = 4$
$\angle ABC = \angle ADC = 90$
$S_{BCD} = ?$



Solution: Answer is in the complete version of the file

Example 3) $\angle ADC + \angle DCB = 270°$
$DC = 3$
$AB = 11$
$AC = 9$
$BD = ?$



پاسخ در نسخه کامل جزوه آمده است

Example 4) $AB \perp AC$

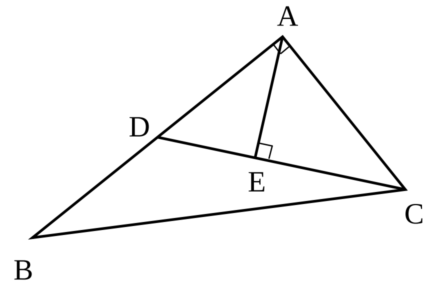
$AE \perp DC$

$\angle ACD = 2\angle DCB$

$AD = BD$

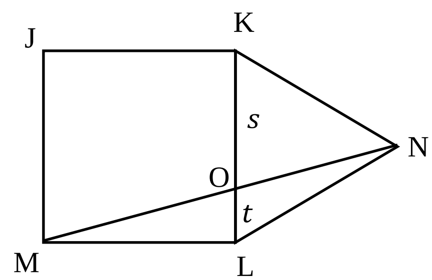
$DE = 3$

$AC = x = ?$



پاسخها در نسخه کامل جزوه آمده است

Example 5) JKLM is a square
KNL is an equilateral triangle
$KO = s$
$OL = t$
$\frac{s}{t} = ?$

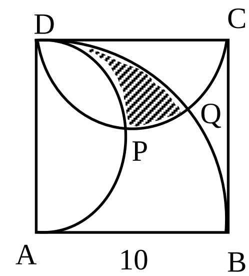


راه حل: مثلث MLN متساوی الساقین است با زاویه راس 150 درجه لذا $O\widehat{N}L = 15°$

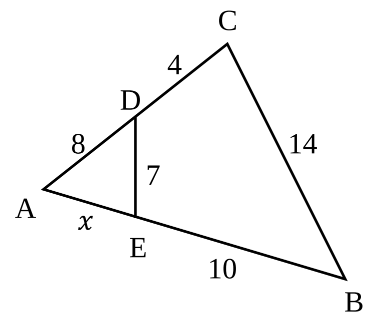
$$\left.\begin{aligned} S_{KNO} &= \frac{KN \times ON \times \sin 45}{2} \\ S_{ONL} &= \frac{ON \times NL \times \sin 15}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{S_{KNO}}{S_{ONL}} = \frac{s}{t} = \frac{\sin 45}{\sin 15}$$

$$\sin 15 = \sin(45 - 30) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{s}{t} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{3} - 1} = \sqrt{3} + 1$$

Example 6) ABCD is a square of side 10.
APD, CPD are semicircles and ADQB is a quarter circle.
Find the shaded area.



Example 7) $DC = 4$
$DE = 7$
$BC = 14$
$BE = 10$
$AD = 8$
$AE = x = ?$

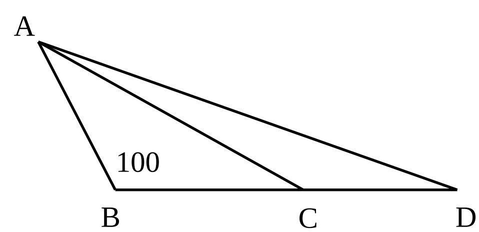


Example 8) $AB = BC$

$AC = BD$

$\angle ABC = 100°$

$\angle CAD = ?$



Example 9) $AK = AN$

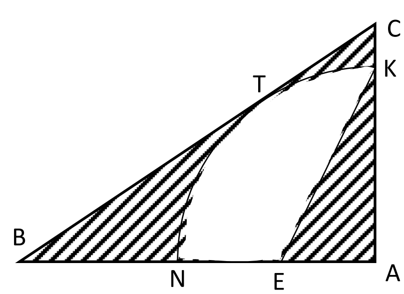
$\widehat{KTN} = 90°$

$TC = 3$

$BT = 12$

$AE = 2$

$area\ of\ shaded\ region = ?$

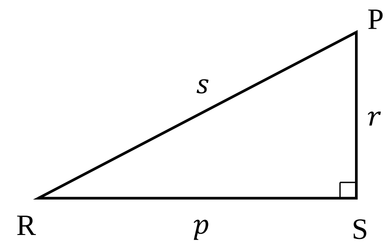


پاسخها در نسخه کامل جزوه آمده است

Example 10) $PS \perp RS$

$(s+r+p)(r+p-s)=64$

$area\ of\ \Delta\ PRS=?$



Solution: $(r+p)^2-s^2=64$

$2rp=64$

$\frac{rp}{2}=16$

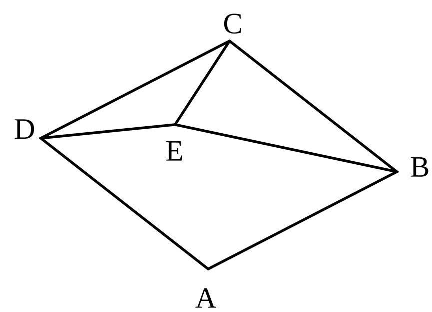
Example 11) ABCD is a diamond (equilateral quadrangle)

$DE=EC$

$\angle CDE=18$

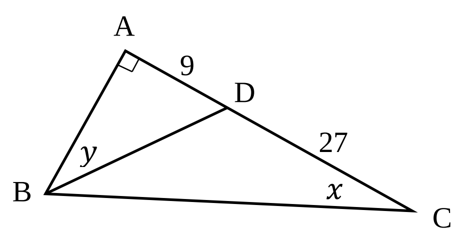
$\angle ECB=78$

$\angle EBA=?$



Example 12) $5AB=4BD$

$\frac{\hat{x}}{\hat{y}}=?$



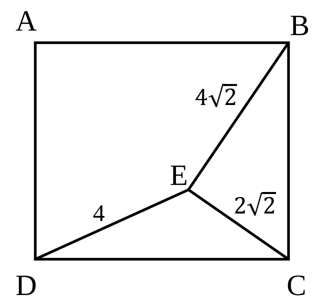
Example 13) ABCD is square

$DE = 4$

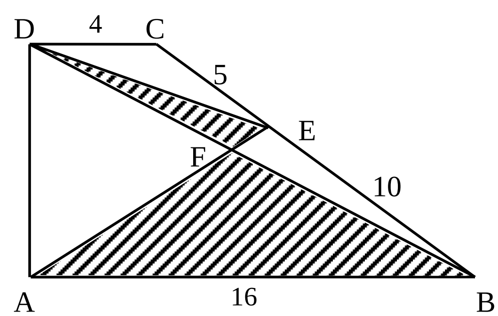
$CE = 2\sqrt{2}$

$BE = 4\sqrt{2}$

$area\ of\ ABCD = ?$



Example 14) $AB = 16$
$DC = 4$
$BE = 10$
$EC = 5$
$area\ of\ shaded\ region = ?$



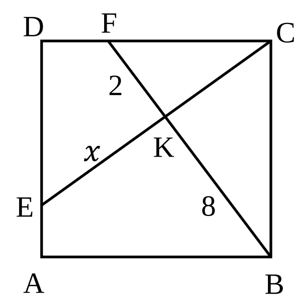
Example 15) ABCD is square

$AE = DF$

$BK = 8$

$FK = 2$

$KE = x = ?$



پاسخها در نسخه کامل جزوه آمده است

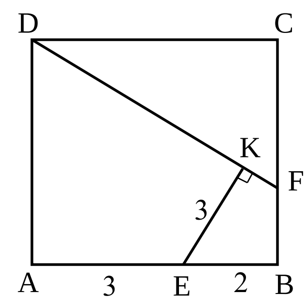
Example 16) ABCD is square

$AE = EK = 3$

$EK \perp DF$

$BE = 2$

$CF = ?$



Example 17) ABCD is square

$AE \perp AF$

$\angle AFB = 55°$

$\angle FEC = ?$