# جزوه آموزشی معادله خط

تالیف : دکتر عماد میرابی

اردیبهشت 1399 (ویرایش آبانماه 99)

mirabiEDU.com

## مقدمه مولف:

این جزوه مخصوص داوطلبانی نوشته شده است که دوست دارند مباحث ریاضی را در سطحی بالاتر از کتاب درسی بیاموزند.

مثالهای زیادی در این جزوه حل شده که داوطلب مشتاق و علاقمند را سیراب میکند و تقریبا همه مسائل را پوشش میدهد.

دانش آموزان متوسط و قوی این جزوه را بسیار بسیار سودمند خواهند یافت.

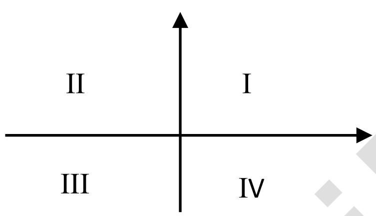
از آنجایی که هیچ کاری بی ایراد نیست از خواننده درخواست میشود ایرادات و اشکالات احتمالی این جزوه را از طریق ایمیل mirabieducenter@gmail.com با ما در میان بگذارد.

عماد میرابی

آبانماه 1399

## فهرست مطالب:

## صفحه مختصات




ربع اول $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$

ربع دوم $\begin{cases} x < 0 \\ y > 0 \end{cases}$

ربع سوم $\begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \end{cases}$

ربع چهارم $\begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \end{cases}$

مثال) $m$ را طوری بیابید که نقطه $\begin{pmatrix} m-1 \\ 2-m \end{pmatrix}$ در ربع چهارم صفحه مختصات باشد.

پاسخ:

$m-1 > 0 \rightarrow m > 1$

$\Rightarrow$ اشتراک $m > 2$

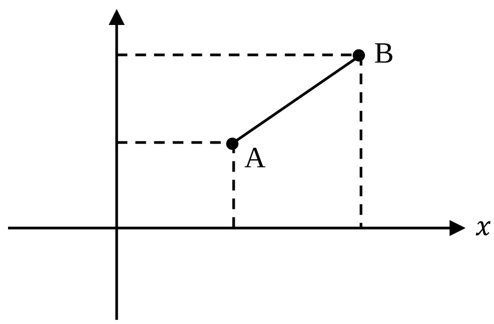
$2-m < 0 \rightarrow m > 2$

مثال) $m$ را طوری بیابید که نقطه $\begin{bmatrix} 2-m \\ 4-m \end{bmatrix}$ روی محور $x$ ها باشد.

پاسخ: نقاطی که روی محور $x$ ها هستند مختصه دوم $(y)$ آنها صفر است.

$$4-m=0 \Rightarrow m=4$$

## فاصله دو نقطه در صفحه مختصات




$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

مثال) فاصله نقطه $\begin{bmatrix}-3\\4\end{bmatrix}$ از مبداء مختصات را بیابید؟

پاسخ: $\sqrt{(-3-0)^2+(4-0)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$

## قرینه یک نقطه نسبت به خط یا نقاطی دیگر

قرینه نقطه $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ نسبت به محور $x$ ها، نقطه $\begin{bmatrix}x\\-y\end{bmatrix}$ است.

قرینه نقطه $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ نسبت به محور $y$ ها، نقطه $\begin{bmatrix}-x\\y\end{bmatrix}$ است.

قرینه نقطه $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ نسبت به مبدا مختصات، نقطه $\begin{bmatrix}-x\\-y\end{bmatrix}$ است.

قرینه نقطه $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ نسبت به خط $x=a$ نقطه $\begin{bmatrix}2a-x\\y\end{bmatrix}$ است.

به خط $y=b$ نقطه $\begin{bmatrix}x\\2b-y\end{bmatrix}$ است.

قرینه نقطه $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ نسبت به نقطه $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$ ، نقطه $\begin{bmatrix}2a-x\\2b-y\end{bmatrix}$ است.

قرینه نقطه $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ نسبت به خط $y=x$ ، نقطه $\begin{bmatrix}y\\x\end{bmatrix}$ است.

قرینه نقطه $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ نسبت به خط $y=-x$ ، نقطه $\begin{bmatrix}-y\\-x\end{bmatrix}$ است.

دوران نقطه $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ حول مبدا مختصات به اندازه 90 درجه پاد ساعتگرد، نقطه $\begin{bmatrix}-y\\x\end{bmatrix}$ را می دهد.

دوران نقطه $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ حول مبدا مختصات به اندازه 90 درجه ساعتگرد ، نقطه $\begin{bmatrix}y\\-x\end{bmatrix}$ را می دهد.

دوران نقطه $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ حول مبدا مختصات به اندازه 180 درجه ، نقطه $\begin{bmatrix}-x\\-y\end{bmatrix}$ را می دهد.

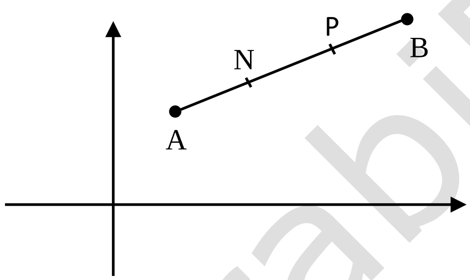
## مختصات وسط پاره خط

* اگر $M$ وسط پاره خط $AB$ باشد،

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$$

* اگر پاره خط $AB$ مانند شکل روبرو به سه قسمت مساوی تقسیم شود






مثال) اگر $A\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ و $B\begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}$ و $C\begin{bmatrix}6\\0\end{bmatrix}$ سه راس یک مثلث باشند، طول میانه $CM$ چقدر است؟

پاسخ: ابتدا وسط پاره خط $AB$ را پیدا می کنیم

$$M\begin{bmatrix}\dfrac{1+3}{2}\\ \dfrac{1+5}{2}\end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{M}\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$$

$$CM = \sqrt{(6-2)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{4^2+3^2} = 5$$

## معادله استاندارد خط $\boldsymbol{y = ax + b}$

$a$ (ضریب $x$ ) شیب خط است.

$b$ عرض از مبدا است.

مثال) در خط به معادله $2y - x = 6$ ، شیب و عرض از مبدا را بیابید؟

پاسخ: معادله خط را به فرم استاندارد درمیاوریم.

$$2y = x + 6$$

$$\div 2 \rightarrow y = \frac{1}{2}x + 3 \Rightarrow \begin{cases} \text{شیب} = \frac{1}{2} \\ \text{عرض از مبدا} = 3 \end{cases}$$

---

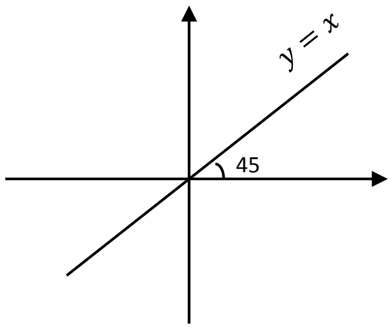
* طول از مبدا: یعنی نقطه تلاقی خط با محور $x$ ها ( پس برای محاسبه آن $y = 0$ می گذاریم)

* عرض از مبدا: یعنی نقطه تلاقی خط با محور $y$ها ( پس برای محاسبه آن $x = 0$ می گذاریم)

مثال) طول از مبدا و عرض از مبدا خط به معادله $3y - 2x = 6$ را بیابید و سپس مساحت مثلثی که خط با محورهای مختصات می سازد را بیابید.

---

## نیمساز ربع اول و سوم $\mathbf{y = x}$



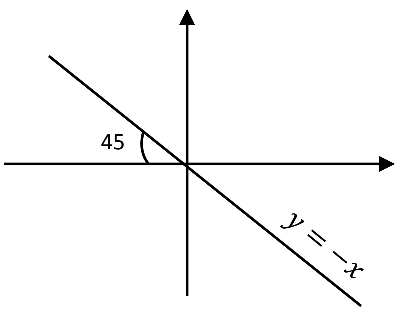

شیب مساوی با 1 است.

عرض از مبدا برابر 0 است.

تمام نقاطی که روی این خط هستند $x, y$ شان برابر است.

پس معادله خط در واقع رابطه ای بین $x, y$ بیشمار نقطه ای است که روی آن خط قرار دارند.

## نیمساز ربع دوم و چهارم




شیب مساوی با 1- است

عرض از مبدا صفر است.

تمام نقاطی که روی این خط هستند، $x, y$ شان قرینه اند.

همانطور که در اینجا هم تایید می شود، معادله خط ، رابطه ای بین مختصات بیشمار نقطه ای است که روی آن خط هستند. و هر نقطه روی یک خط ، در آن معادله خط صدق می کند.

مثال) به ازای کدام مقدار $a$ نقطه $\begin{bmatrix} a+1 \\ \frac{a}{2} \end{bmatrix}$ روی خط به معادله $x + 2y = 5$ است.

پاسخ:

$$a + 1 + 2\left(\frac{a}{2}\right) = 5 \Rightarrow 2\mathrm{a} + 1 = 5$$

$$a = 2$$

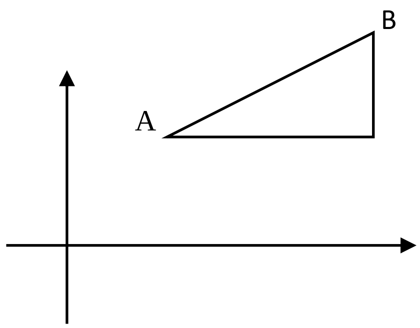
مثال) معادله خطی که از نقاط $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ می گذرد چیست؟

پاسخ: این نقاط را در معادله خط استاندارد $y = ax + b$ جایگذاری می کنیم تا $a, b$ را بیابیم.

$$\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix} \to 3 = \mathrm{a} + \mathrm{b} \qquad \Rightarrow a = 2 \qquad \Rightarrow y = 2x + 1$$

$$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \to 1 = 0 + \mathrm{b} \qquad b = 1$$

## مفهوم شیب خط




$$AB \text{ شیب خط } = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

اگر عرض دو نقطه یکی باشند شیب خط صفر است همنطوری که شیب جاده ای افقی صفر است.

پس به کمک دو نقطه شیب خط را می توانیم محاسبه کنیم و معادله خط را بیابیم.

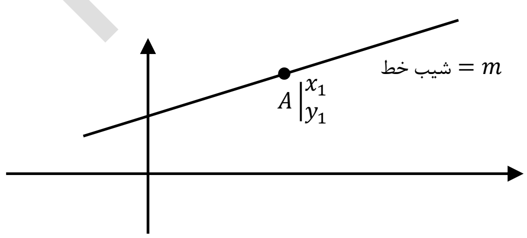
مثال) معادله خطی را بنویسید که از نقاط $\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ می گذرد.

$$\text{شیب خط} = \frac{3-(-1)}{2-0} = \frac{4}{2} = 2$$

$$y = 2x + b \to \begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix} \text{ جایگذاری } -1 = 0 + b \Rightarrow b = -1$$

$$y = 2x - 1$$

## معادله خطی که از نقطه ای معلوم با شیب مشخص می گذرد




$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

هر نقطه ای روی این خط بگیریم با نقطه $A\Big|\begin{matrix}x_1\\y_1\end{matrix}$ شیب $m$ می سازد. $\frac{y-y_1}{x-x_1} = m$ به همین دلیل می توان معادله خط را به اینگونه نوشت.

مثال) معادله خطی را بنویسید که از نقطه $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ می گذرد و شیب آن $\frac{1}{3}$ است.

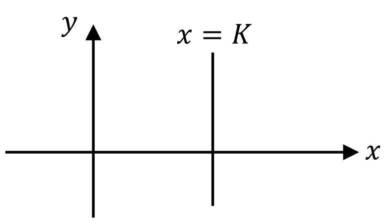
پاسخ:

$$y - 1 = \frac{1}{3}(x - 0)$$

$$\text{ساده سازی} \rightarrow y = \frac{1}{3}x + 1$$

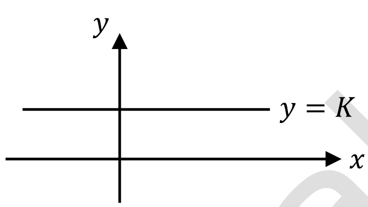
## خطوط قائم $\boldsymbol{x = K}$

جزوه کامل را در فایل اصلی ببینید.




## خطوط افقی $\boldsymbol{y = K}$

جزوه کامل را در فایل اصلی ببینید.




---

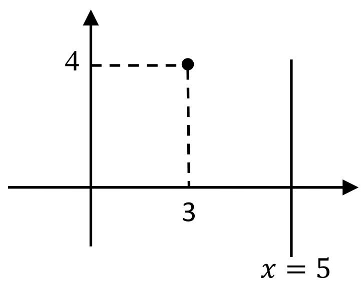
مثال) $m$ را طوری بیابید که خط به معادله $(m^2 - 1)x + (m - 1)y = m + 2$ موازی محور $x$ ها باشد؟

پاسخ همه سوالات در فایل اصلی آورده شده است

* با توجه به اینکه معادله استاندارد خط $(y = ax + b)$ همه خطوط صفحه را شامل نمی شود، ( در واقع فقط خطوط قائم را شامل نمی شود ) لذا معادله کلی خط را به صورت $ax + by + c = 0$ می نویسند.

## فاصله یک نقطه تا یک خط

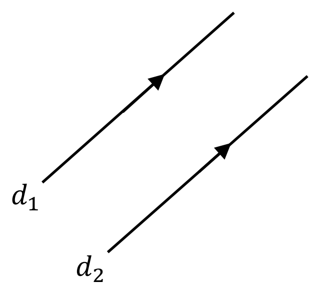
مثال) فاصله نقطه $\begin{bmatrix} 3 \\ +4 \end{bmatrix}$ از خط $x = 5$ را بیابید؟




راه حل: چون خط قائم است راه حل ساده ای وجود دارد و نیازی به استفاده از فرمول نیست.

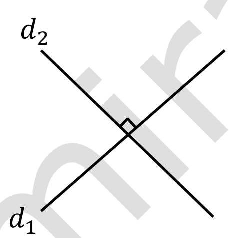
$$\text{فاصله} = 5 - 3 = 2$$

---




$$d_1 \parallel d_2 \iff m_1 = m_2$$

شیب خطوط موازی برابر است.




$$d_1 \perp d_2 \iff m_2 = \frac{-1}{m_1}$$

شیب خطوط قائم، قرینه و معکوس یکدیگر است.

مثال) معادله خطی را بنویسید که از نقطه $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ بگذرد و موازی با خط $y + 3x = 7$ باشد.

راه حل:

$$y = -3x + 7 \Rightarrow \left.\begin{matrix} \text{شیب خط} = -3 \\ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \end{matrix}\right\} \Rightarrow y - (-2) = -3(x - 1)$$

$$y + 2 = -3x + 3$$

$$y = -3x + 1$$

# یافتن محل تلاقی دو خط

---

حل دستگاه دو معادله و دو مجهول همیشه منجر به جواب یکتا نمی شود.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

1) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \rightarrow$ دو خط منطبق اند $\Rightarrow$ دستگاه بیشمار جواب دارد

2) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2} \rightarrow$ دو خط موازی اند $\Rightarrow$ دستگاه جواب ندارد

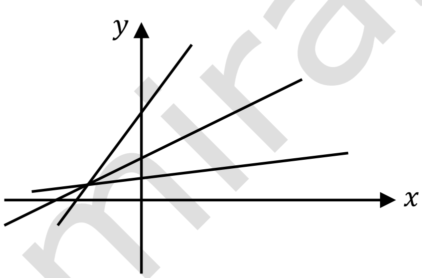
3) $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \rightarrow$ دو خط متقاطع اند $\Rightarrow$ دستگاه جواب یکتا دارد

---

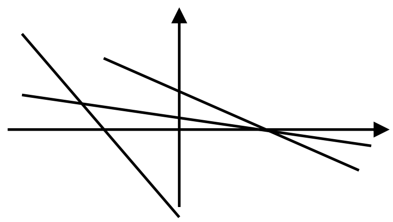
مثال) دستگاه معادلات $\begin{cases} mx + y = 1 \\ (2m+1)x + y = 2 \end{cases}$ به ازای چه مقدار $m$ جواب ندارد؟

---

❋ خطوطی به فرم مقابل شیب شان مثبت است زیرا اگر به تعریف شیب دقیق شویم $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} =$ شیب و روی خطوط به سمت مثبت محور $x$ ها حرکت کنیم (مخرج کسر مثبت است) این خطوط صعودی هستند یعنی عرض شان در حال افزایش است.



* خطوطی به فرم مقابل شیب شان منفی است زیرا اگر روی خطوط به سمت مثبت محور $x$ حر کت کنیم (مخرج شیب مثبت) این خطوط نزولی هستند یعنی $y$ شان در حال کاهش است (صورت شیب منفی می شود)



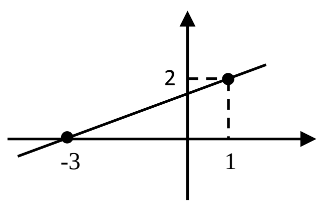
## زاویه بین دو خط

## رسم یک خط

چون هر خط به کمک دو نقطه مشخص می شود کافیست دو نقطه دلخواه از خط را بیابیم و رسم کنیم.

مثال) خط به معادله $2y - x = 3$ را رسم کنید.

| $x$ | -3 | 1 |
| --- | --- | --- |
| $y$ | 0 | 2 |




## مسائل متفرقه

مثال1) $m$ را طوری بیابید که نقاط $A\left|\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}-2\\3\end{matrix}\right.$ و $C\left|\begin{matrix}7\\m\end{matrix}\right.$ بر یک استقامت باشند.

---

* $y = mx$ معادله دسته خطوطی است که از مبدا مختصات می گذرد. (شیب آن $m$ هر مقداری می تواند باشد)

* $y - 2 = m(x + 1)$ معادله دسته خطوطی است که از نقطه $\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$ می گذرد. (شیب آن هر مقداری می تواند باشد)

مثال3) خطوط به معادله $y - ax + 2a - 1 = 0$ به ازای جمیع مقادیر $a$ از چه نقطه ای می گذرد.

پاسخ همه سوالات در فایل اصلی آورده شده است

مثال4) نقاط $A\left|\begin{matrix}2\\5\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right.$ و $C\left|\begin{matrix}7\\2\end{matrix}\right.$ سه راس مثلث ABC هستند.

الف) معادله ارتفاع AH ؟

ب) طول ارتفاع AH ؟

ج) معادله میانه AM ؟

د) طو ل میانه AM ؟

ه) معادله عمود منصف BC ؟

پاسخها و راه حل کامل در فایل اصلی آورده شده است.

مثال5) نقطه $(5m+2\ ,\ -2m+9)$ در ناحیه سوم صفحه مختصات قرار دارد. مقدار $m$ را چنان تعیین کنید که این نقطه از محورهای مختصات به یک فاصله باشد.

مثال6) مقدار $m$ را چنان تعیین کنید که نقطه A(-1, -2) نقطه برخورد دو خط زیر باشد

$$\frac{x}{2}-\frac{y}{3}=\frac{1}{6} \qquad \frac{2m-3}{5}x-2y=1$$

مثال7) مقادیر $n\ ,m$ را چنان تعیین کنید که نقطه A(0 , -1) نقطه برخورد دو خط زیر باشد.

$$(m^2+3)x-(n-1)y=2-3m$$

$$3mx-(m+n-1)y=0$$

پاسخها و راه حل کامل در فایل اصلی آورده شده است.

مثال8) K را چنان تعیین کنید که نقاط $A\begin{pmatrix}2K-5\\-2K+6\end{pmatrix}$ و $B\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ نسبت به نیمساز ناحیه دوم قرینه یکدیگر باشند.

مثال9) مقادیر $n\,,m$ را چنان تعیین کنید که نقاط $A\begin{pmatrix} m-2n \\ m-2 \end{pmatrix}$ و $B\begin{pmatrix} m-n \\ 2m+1 \end{pmatrix}$ نسبت به نیمساز ناحیه سوم قرینه یکدیگر باشند.

مثال10) مقدار $m$را چنان تعیین کنید که نقطه $\begin{pmatrix} 2m-3 \\ 1-m \end{pmatrix}$ روی نیمساز ناحیه دوم و چهارم قرار گیرد.

راه حل: معادله خط نیمساز ربع دوم و چهارم $y=-x$ است لذا

$$1-m=3-2m \quad \Rightarrow m=2$$

مثال) مقدار $m$ را چنان تعیین کنید که طول از مبدا خط زیر 1- باشد.

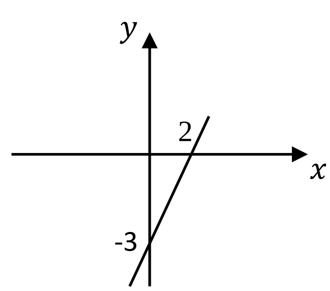
$$2mx-3y=x-y(m+1)-5$$

راه حل: اگر طول از مبدا خط 1- باشد یعنی نقطه (0 ,1-) روی این خط قرار دارد.

$$-2m=-1-5 \ \Rightarrow m=3$$

مثال11) مساحت مثلثی را حساب کنید که خط D به معادله $3x-2y=6$ با محورهای مختصات می سازد

راه حل:




$$x=0 \ \rightarrow \ y=-3$$

$$y=0 \ \rightarrow \ x=2$$

$$area=\frac{2\times 3}{2}=3$$

مثال12) مقدار $a$ را چنان تعیین کنید که خط $d$ به معادله $2ax+3y=x+6$

با محورهای مختصات مثلثی به مساحت 3 واحد مربع بسازد.

مثال13) $n\,,m$ را چنان تعیین کنید که خط $(m-n-4)x-(n-2)y+m+4=0$

موازی محور طول ها بوده و محور عرض ها را در نقطه ای به عرض 1- قطع کند.

مثال14) معادله قطرهای دایره ای در حالت کلی بصورت $nx + 2y = 2n + 6$ است. معادله خط مماس بر دایره در نقطه $A\binom{-1}{4}$ واقع بر ان دایره را بنویسید.

مثال15) نقاط $A(-3,5)$ و $B(1,7)$ راس های مجاور یک متوازی الاضلاع و $M(1,1)$

نقطه برخورد قطرهای ان است. مختصات دو راس دیگر را بدست آورید.

مثال16) معادله خطی را بنویسید که خط $y + 2x = 3$ را در نقطه ای به طول 1 و خط $3y - x = 2$ را در نقطه ای به عرض 2 قطع کند.

مثال17) اگر $A(3,-1)$ و $C(-1,2)$ دو راس مقابل یک مربع باشند، اولا مساحت مربع را بدست آورید.

ثانیا معادله قطرهای مربع را بنویسید.

پاسخها و راه حل کامل در فایل اصلی آورده شده است.

مثال18) دو نقطه $A(4,-1)$ و $B(-8,5)$ نسبت به چه خطی قرینه اند؟ معادله آن خط را بنویسید.

مثال19) معادله دایره ای را بنویسید که مرکز آن O(1, -1) و شعاع آن $R = 3$ است.

## مقدمه مولف:

این جزوه مخصوص داوطلبانی نوشته شده است که دوست دارند هندسه را در سطحی بالاتر از کتاب درسی بیاموزند.

مثالهای زیادی در این جزوه حل شده که داوطلب مشتاق و علاقمند را سیراب میکند.

دانش آموزان قوی این جزوه را بسیار بسیار سودمند خواهند یافت.

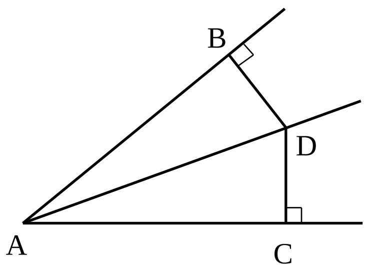
از آنجایی که هیچ کاری بی ایراد نیست از خواننده درخواست میشود ایرادات و اشکالات احتمالی این جزوه را از طریق ایمیل mirabieducenter@gmail.com با ما در میان بگذارد.

عماد میرابی

آبانماه 1399

## فهرست مطالب:

مثال) ثابت کنید هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد روی نیمساز آن زاویه قرار دارد.




اثبات: D را به A وصل می کنیم

فرض : $BD = CD$ حکم : $\angle BAD = \angle CAD$

$$\left.\begin{array}{r} AD = AD \\ BD = CD \\ \angle B = \angle C = 90 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع قائم}} \Delta ABD \cong \Delta ACD \Rightarrow B\hat{A}D = C\hat{A}D$$

به قضایایی که دو طرفه صحیح هستند، قضایای دو شرطی می گوییم و عبارت " اگر و فقط اگر" برای بیان این قضایا استفاده می شود.

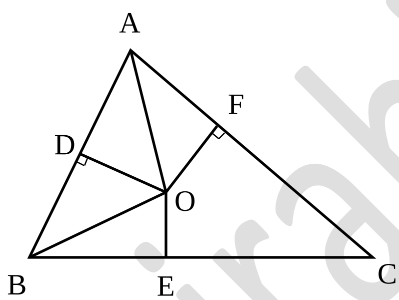
هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است و بالعکس

یک نقطه از دو ضلع زاویه به یک فاصله است اگر و فقط اگر آن نقطه روی نیمساز آن زاویه باشد.

هر نقطه روی عمود منصف هر پاره خط، از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است و بالعکس.

یک نقطه از دو سر پاره خطی به یک فاصله است اگر و فقط اگر آن نقطه روی عمود منصف آن پاره خط باشد.

مثال) ثابت کنید سه نیمساز هر مثلث همرسند.



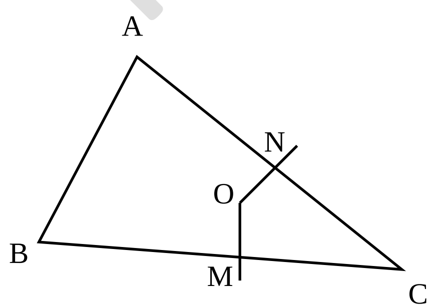

اثبات: نیمسازهای زوایای $\hat{A}$ و $\hat{B}$ را رسم کرده تا همدیگر را در $D$ قطع کنند.

$O$ روی نیمساز زاویه $\hat{A}$ است پس $OD = OF$

$O$ روی نیمساز زاویه $\hat{B}$ است پس $OD = OE$

لذا $OE = OF$ و نقطه $O$ از دو ضلع زاویه $C$ به یک فاصله است پس روی نیمساز زاویه $\hat{C}$ هم هست.

مثال) ثابت کنید سه عمود منصف هر مثلث همرسند

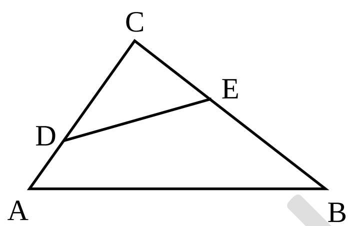



اثبات: عمود منصف اضلاع $BC$ و $AC$ را رسم می کنیم تا همدیگر را در $O$ قطع کنند

$O$ روی عمود منصف $BC$ است پس $OB = OC$

$O$ روی عمود منصف $AC$ است پس $OA = OC$

مثال 4) در شکل روبرو




$DC = 4 \quad , \quad AD = 2$

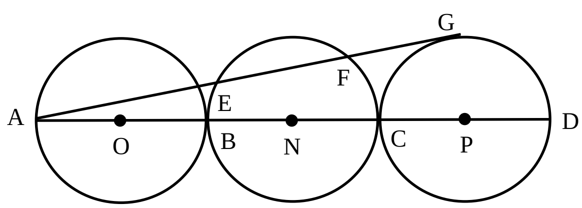
$CE = 3 \quad , \quad BE = 5$

ثابت کنید دو مثلث CDE و ABC متشابه اند
و نسبت اضلاع دو مثلث را بنویسید.

مثال 5) در مثلث ABC، میانه AM را رسم می کنیم و از نقطه دلخواه D واقع بر ضلع BC خطی موازی AM رسم می کنیم تا AC را در E، و AB را در F قطع کند، ثابت کنید

$DE + DF = 2AM$

مثال 6) در شکل روبرو نقطه های B و C بر
پاره خط AD واقع هستند و AB و BC و CD
قطرهای دایره ها به مرکز O و N و P هستند.



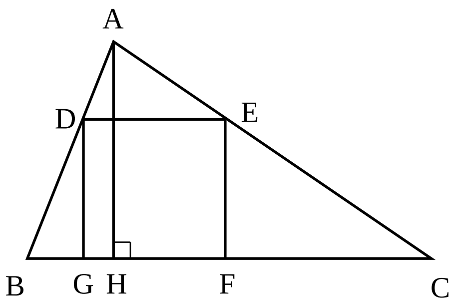

شعاع هر یک از دوایر 15 سانتی متر است

و پاره خط AG بر دایرهP  مماس است
و دایره N را در E و F  قطع می کند

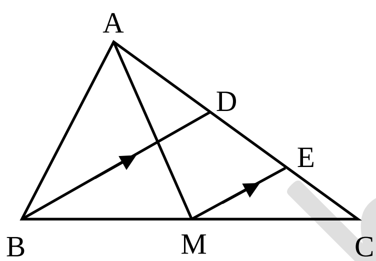
طول وتر EF چقدر است؟

پاسخ را در فایل اصلی میتوانید بیابید.

مثال 7)  در شکل روبرو $AH = 4$ و $BC = 6$
DEFG مربع است. طول ضلع مربع چقدر است؟
پاسخ و یا اثبات همه سوالات داخل فایل اصلی قرار دارد.




مثال 8)  در شکل روبرو O وسط میانه AM است
نسبت $\frac{AE}{AC}$ چیست؟




راه حل:

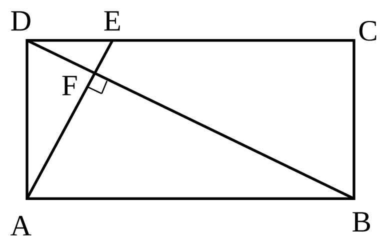
$$\Delta\, AME: OD \parallel ME \ \Rightarrow \frac{AO}{OM} = \frac{AD}{DE} = 1$$

$$\Delta\, BCD: ME \parallel BD \ \Rightarrow \frac{CM}{MB} = \frac{CE}{ED} = 1$$

پس پاره خط های AD و DE و EC برابرند و $\frac{AE}{AC} = \frac{2}{3}$

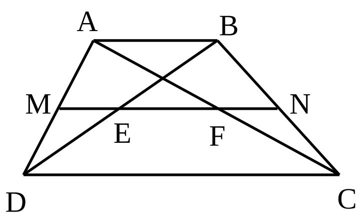
مثال 9) در مستطیل شکل روبرو $AE \perp BD$ و $AB = 3AD$

$\frac{DC}{DE} = ?$



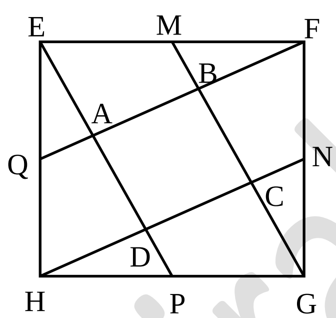

راه حل: پاسخ را در فایل اصلی میتوانید بیابید.

مثال 10) در ذوزنقه ABCD نقاط M و N وسط های AD و BC هستند اگر $AB = 6$ , $DC = 8$ طول پاره خط EF چقدر است؟



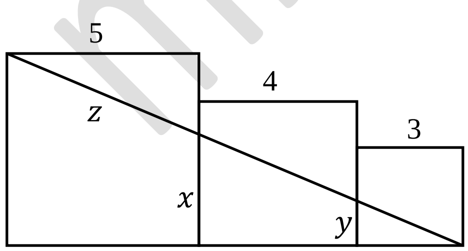

راه حل: پاسخ را در فایل اصلی میتوانید بیابید.

مثال 11) در شکل روبرو M و N و P و Q وسط ای اضلاع مربع EFGH هستند، نسبت مساحت مربع ABCD به مساحت مربع EFGH چیست؟




پاسخ را در فایل اصلی میتوانید بیابید.

مثال 12) سه مربع به اضلاع 3 ,4 ,5 کنار هم قرار گرفته اند طول پاره خط های $z, y, x$ را بیابید.

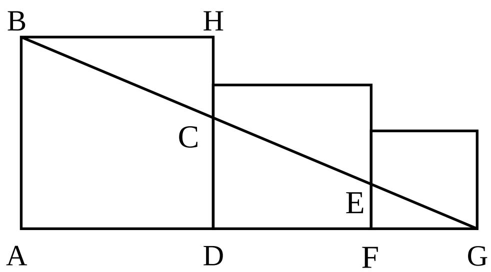



راه حل:

$$\Delta\, AGB: EF \parallel AB \;\Rightarrow\; \frac{EF}{AB} = \frac{3}{12}$$

$$\Rightarrow EF = \frac{5}{4} = y$$

$$\Delta\, AGB: DC \parallel AB \;\Rightarrow\; \frac{CD}{AB} = \frac{7}{12}$$

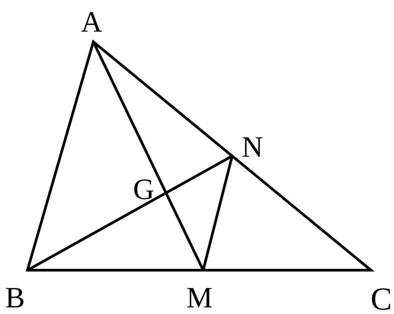



$$\Rightarrow\ CD = \frac{35}{12} = x$$

$$\Rightarrow CH = 5 - \frac{35}{12} = \frac{25}{12}$$

$$z = \sqrt{5^2 + (\frac{25}{12})^2}$$

مثال 13)      ثابت کنید میانه های هر مثلث هم رسند




اثبات: میانه های $AM$ و $BN$ در مثلث $ABC$ را رسم می کنیم تا همدیگر را در $G$ قطع کند.

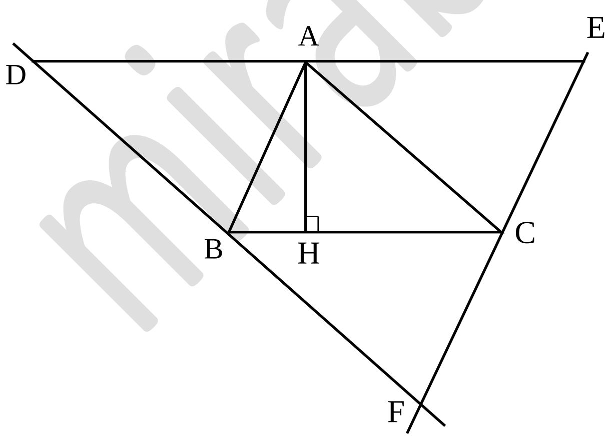
$$\frac{CM}{MB} = \frac{CN}{NA} = 1 \ \Rightarrow\ MN \parallel AB$$

$$\frac{CM}{CB} = \frac{MN}{AB} = \frac{1}{2}$$

مثلث های GMN و GAB متشابه اند و نسبت تشابه آنها $\frac{1}{2}$ است. پس $\frac{GM}{AG} = \frac{GN}{GB} = \frac{1}{2}$

بنابراین میانه های مثلث توسط نقطه G به نسبت 1به 2 قطع می شوند. حال اگر میانه نظیر راس C را هم رسم کنیم حتما AM را در $G$ قطع می کند.

مثال 14)      ثابت کنید ارتفاع های هر مثلث همرسند.




اثبات: از رئوس A و B و C مثلث ABC به

موازات اضلاع مقابل رسم می کنیم

تا شکل مقابل بدست آید.

$$\frac{AE}{DE} = \frac{CE}{FE} = \frac{DB}{DF} = \frac{DA}{DE}$$
$$\Rightarrow AE = DA$$

به طریق مشابه می توان نشان داد که نقاط B و C هم وسط اضلاع

DF و FE هستند. پس ارتفاع های مثلث ABC عمود منصف های مثلث DEF هستند و قبلا اثبات کرده ایم

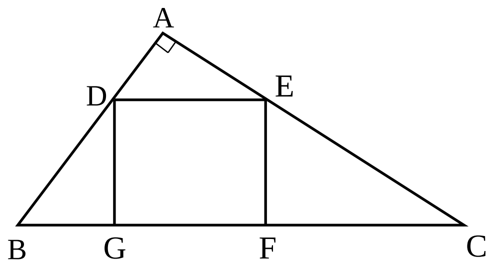
که عمود منصف های هر مثلث چرا همرسند (استفاده از خاصیت عمود منصف)

$$\left.\begin{matrix} AH \perp BC \\ BC \parallel DE \end{matrix}\right\} \Rightarrow AH \perp DE$$

مثال 15) مثلث ABC قائم الزاویه است

و DEFG مربع است

ثابت کنید $GF^2 = BG \times FC$

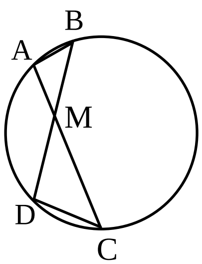



اثبات: اثبات را در فایل اصلی میتوانید بیابید.

مثال 16) برای هر دو وتر دلخواه AC و BD از دایره که همدیگر را در M قطع می کنند

ثابت کنید

$$MA \times MC = MB \times MD$$




اثبات: وترهای AB و CD را رسم کرده و ثابت می کنیم که مثلث های MAB و MCD متشابه اند.

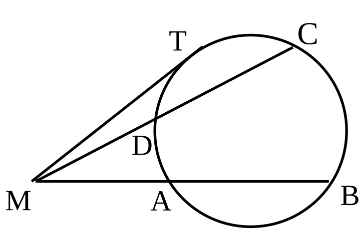
$$\left.\begin{matrix} \hat{B} = \dfrac{\widehat{AD}}{2} \\ \angle C = \dfrac{\widehat{AD}}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \angle B = \angle C \\ \angle AMB = \angle DMC \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{ز ز} \quad \Delta\, MAB \sim \Delta\, MCD$$

$$\Rightarrow \frac{MA}{MD} = \frac{MB}{MC} \Rightarrow MA \times MC = MB \times MD$$

مثال 17) در شکل روبرو MT مماس بر دایره است.

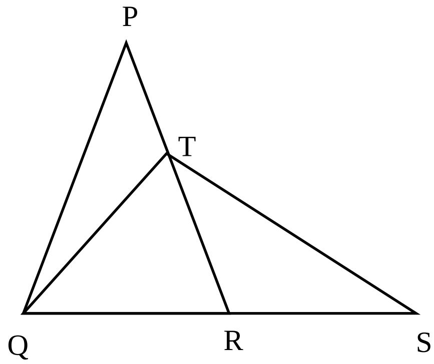
ثابت کنید

$$MA \times MB = MD \times MC = MT^2$$




اثبات: وترهای AC و BD را رسم کرده و براحتی اثبات می شود که

مثال 21) در شکل روبرو



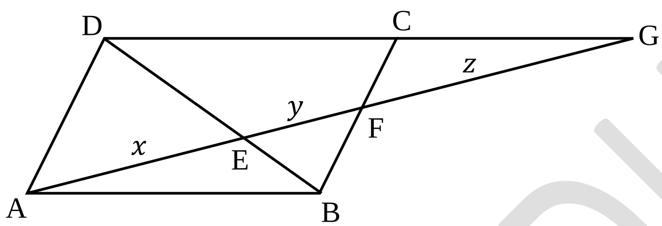

$QR = RS = QT$
$PT = TR$

ثابت کنید:

الف) $\angle PTQ = \angle TRS$

ب) $PQ = TS$

مثال 24: ABCD متوازی الاضلاع است. ثابت کنید
$x^2 = y(y + z)$




اثبات:

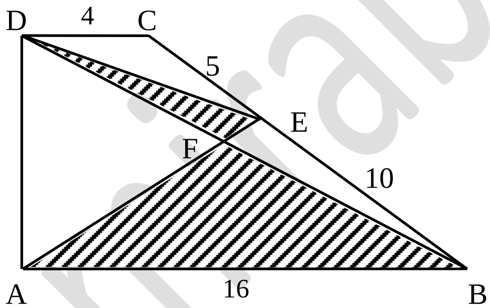
پاسخ و یا اثبات همه سوالات داخل فایل اصلی قرار دارد.

مثال 25: ABCD ذوزنقه قائم الزاویه است.

$AB = 16$
$DC = 4$
$BE = 10$
$EC = 5$

مساحت ناحیه هاشورخورده را حساب کنید

پاسخ و یا اثبات همه سوالات داخل فایل اصلی قرار دارد.



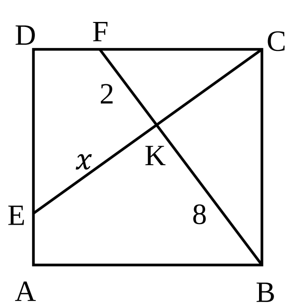

مثال 26: ABCD مربع است.

$AE = DF$

$BK = 8$

$FK = 2$

$KE = x = ?$




$CF = D$

راه حل:

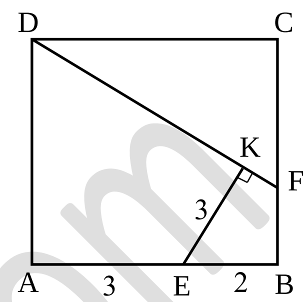
Example 27) ABCD is square

$AE = EK = 3$

$EK \perp DF$

$BE = 2$

$CF = ?$



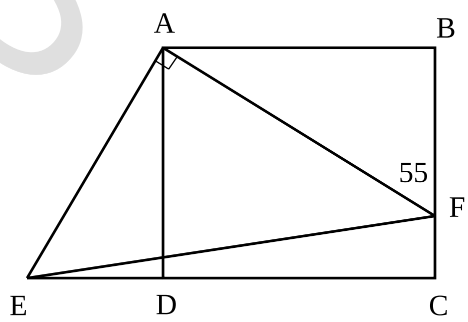

پاسخ و یا اثبات همه سوالات داخل فایل اصلی قرار دارد.

Example 28) ABCD is square

$AE \perp AF$

$\angle AFB = 55°$

$\angle FEC = ?$




پاسخ و یا اثبات همه سوالات داخل فایل اصلی قرار دارد.

آموزشگاه علمی میرابی

MEC

Mirabi Educational Center

# جزوه آموزشی عبارات گویا


**تالیف : دکتر عماد میرابی**



**اردیبهشت 1399** ( ویرایش آبان 99)

mirabiEDU.com

## مقدمه مولف:

این جزوه آموزشی هم برای دانش آموزان متوسط و هم قوی قابل استفاده است.

سعی شده با حل مثالهای فراوان، نکات و جزئیات این فصل بصورت کامل پوشش داده شود.

داوطلبان کنکور و دانش آموزان قوی، این جزوه آموزشی را بسیار سودمند خواهند یافت.

عماد میرابی

آبانماه 1399

## فهرست مطالب:

## تقسیم چند جمله ای بر یک جمله ای

## تقسیم چند جمله ای بر چند جمله ای

---

مثال) تقسیم های زیر را انجام دهید و خارج قسمت و باقیمانده را بیابید؟

الف) $(4x^3 - 3x^2 + x + 7) \div (x^2 - 2)$

ب) $(x^2 - 5x - 24) \div (x - 8)$

ج) $(x^3 + 1) \div (x - 1)$

د) $(6x^3 - 19x^2 + 16x - 4) \div (2 - x)$

---

### قضیه تقسیم

اگر $\mathrm{P(x)}$ بر $x - a$ تقسیم شود، خارج قسمت را $\mathrm{Q(x)}$ و باقیمانده را $R$ بنامیم.

$$\begin{array}{l|l} P(x) & \quad x-a \\ \cline{2-2} & \quad Q(x) \\ \hline R & \end{array} \qquad \Rightarrow \quad \mathrm{P(x) = (x-a)Q(x) + R}$$

حال اگر در رابطه بالا به جای $x$ ، $a$ جایگذاری کنیم

$$\mathrm{P(a) = R}$$

و این یعنی باقیمانده تقسیم را می توان بدون انجام عمل تقسیم محاسبه کرد.

* $P(a)$ برابر است با باقیمانده تقسیم $P(x)$ بر $\mathrm{x - a}$

* $P(2)$ برابر است با باقیمانده تقسیم $P(x)$ بر $\mathrm{x - 2}$

* $P(-3)$ برابر است با باقیمانده تقسیم $P(x)$ بر $x + 3$

---

مثال) باقیمانده تقسیم $\mathrm{P(x)} = x^3 + 2x^2 - 3x + 1$ بر $x - 2$ را بیابید.

پاسخها در فایل اصلی آورده شده است

---

مثال) m را طوری بیابید که عبارت جبری $x^3 - mx^2 + 4$ بر $x + 1$ بخشپذیر باشد؟

پاسخها در فایل اصلی آورده شده است

---

مثال) باقیمانده تقسیم $P(x)$ بر $x - 2$ مساوی با 3 و

باقیمانده تقسیم $P(x)$ بر $x - 3$ مساوی با 5 شده است.

باقیمانده تقسیم $P(x)$ بر $x^2 - 5x + 6$ را بدست آورید.

پاسخها در فایل اصلی آورده شده است

---

مثال) باقیمانده تقسیم $x^5 - x$ بر $x^3 - x$ را بیابید.

پاسخ: یک روش سریع یافتن باقیمانده این است که هر کجا $x^3$ داشتیم به جای آن $x$ بگذاریم.

$$x^5 - x = x^3.x^2 - x \to x.x^2 - x = x^3 - x \to x - x = 0$$

لذا $x^5 - x$ بر $x^3 - x$ بخشپذیر است.

* از همین تست بخشپذیری در تجزیه عبارات جبری دشوار می توان استفاده کرد. مثالهای زیر را ببینید.

---

مثال) عبارات جبری زیر را تجزیه کنید؟

الف) $x^3 - 7x + 6$

ب) $2x^4 - 5x - 22$

ج) $x^3 + ax^2 + 4a^3$

د) $3x^2 - 2x - 21$

پاسخها در فایل اصلی آورده شده است

## تقسیم سریع چند جمله ای بر چند جمله ای

آموزشگاه علمی میرابی

MEC

Mirabi Educational Center

# جزوه آموزشی سطح و حجم

تالیف : دکتر عماد میرابی

آبانماه 99

mirabiEDU.com

# مقدمه مولف:

این جزوه مخصوص داوطلبانی نوشته شده است که دوست دارند هندسه را در سطحی بالاتر از کتاب درسی بیاموزند.

مثالهای زیادی در این جزوه حل شده که داوطلب مشتاق و علاقمند را سیراب میکند.

دانش آموزان قوی این جزوه را بسیار بسیار سودمند خواهند یافت.

از آنجایی که هیچ کاری بی ایراد نیست از خواننده درخواست میشود ایرادات و اشکالات احتمالی این جزوه را از طریق ایمیل mirabieducenter@gmail.com با ما در میان بگذارد.

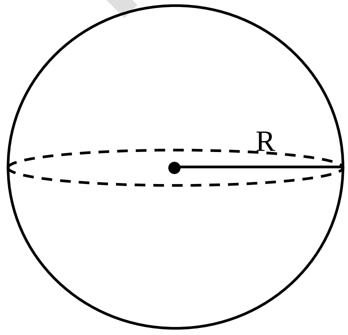
عماد میرابی

آبانماه 1399

# فهرست مطالب:



# کره




دایره: مکان هندسی نقاطی از صفحه که از یک نقطه خاص به فاصله ثابتی باشند.

کره: مکان هندسی نقاطی از فضا که از یک نقطه خاص به فاصله ثابتی باشند.

مساحت کره = $4\pi R^2$

$\frac{4}{3}\pi R^3$ = حجم کره

مثال: مساحت و حجم یک کره از نظر عددی برابر است. شعاع این کره چقدر است؟

پاسخ:

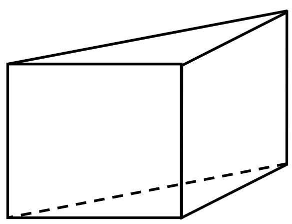
$$\frac{4}{3}\pi R^3 = 4\pi R^2 \Rightarrow R = 3$$

مثال: نیم دایره ای به شعاع 4 cm را حول قطر ان به اندازه 90 درجه دوران می دهیم حجم شکل ایجاد شده چقدر است؟

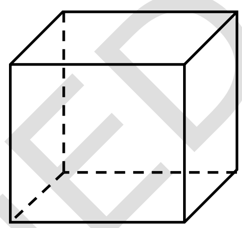
پاسخ: شکل ایجاد شده ربع یک کره است.

$$\mathrm{V} = \frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) = \frac{\pi R^3}{3} = \frac{64\pi}{3}$$

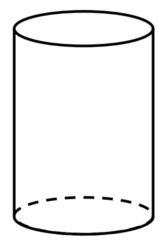
## منشور و استوانه



منشور با قاعده مثلث



منشور با قاعده چهارضلعی



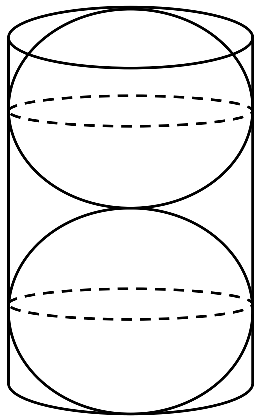
استوانه

قاعده منشور میتواند هر چیزی باشد و وقتی قاعده منشور دایره باشد منشور استوانه نام دارد.

فرمولهای زیر برای هر منشوری صادق هستند.

1. مساحت جانبی برابر است با محیط قاعده ضرب در ارتفاع
2. مساحت کل برابر است با مساحت جانبی به علاوه دو برابر مساحت قاعده
3. حجم منشور برابر است با مساحت قاعده ضرب در ارتفاع

مثال: مطابق شکل زیر، دو کره دقیقا داخل استوانه ای قرار گرفته اند. چه کسری از حجم استوانه توسط دو کره اشغال شده است؟



پاسخ:

پاسخها در فایل اصلی آورده شده است

---

مثال) مستطیلی به ابعاد $4 \times 3$ را یک بارحول طول و بار دیگر حول عرض آن دوران می دهیم، نسبت دو حجم ایجاد شده چقدر است؟

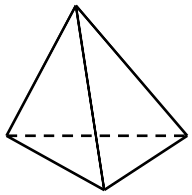
پاسخ ها و راه حل کامل سوالات در نسخه اصلی فایل آورده شده است.

مثال) صفحه ای، کره ای به شعاع $5$ را قطع می کند. اگر سطح مقطع ایجاد شده دایره ای به مساحت $16\pi$ باشد فاصله مرکز کره تا صفحه چقدر است؟

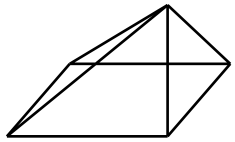
پاسخ:

---

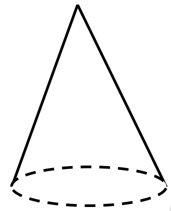
# هرم و مخروط



هرم مثلثی



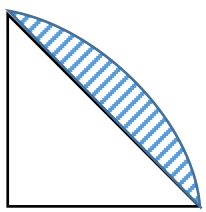
هرم با قاعده چهارضلعی



مخروط

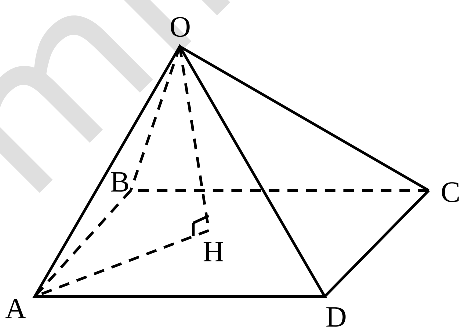
$$\text{حجم هرم} = \frac{1}{3}(\text{مساحت قاعده})(\text{ارتفاع})$$

مثال) از دوران شکل روبرو حول یکی از شعاع ها، چه شکلی بوجود می آید؟
حجم ناحیه هاشورخورده چقدر خواهد بود؟



مثال) در هرم مربع القاعده زیر ارتفاع OH برابر 4 سانتی متر و طول یالها 5 سانتی متر است.

$$OA = OB = OC = OD = 5\ \text{cm}$$




الف) حجم هرم چقدر است؟

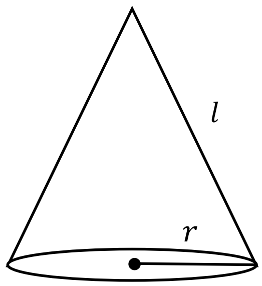
ب) مساحت کل هرم چقدر است؟

پاسخ) پاسخ ها و راه حل کامل سوالات در نسخه اصلی فایل آورده شده است.

❋ اگر در یک هرم، چند ضلعی قاعده، یک چند ضلعی منتظم باشد و وجه های جانبی با هم همنهشت باشند، هرم را منتظم می گویند.

❋ چهار وجهی منتظم یک هرم با قاعده مثلث است که همه وجوه آن مثلث متساوی الاضلاع هستند.

❋ مساحت جانبی مخروط = $\pi r l$




اثبات: اگر در راستای یک یال مخروط را برش بزنیم گسترده آن قطاعی به شکل زیر میشود.

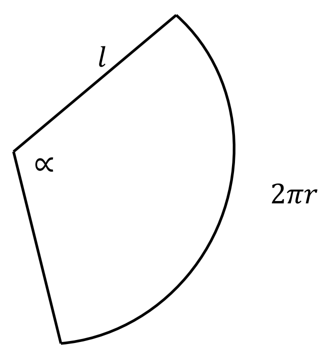
روش اول) به کمک رابطه ای که طول کمان را به شعاع و زاویه مرتبط می کند داریم:

(زاویه بر حسب رادیان)(شعاع)= طول کمان

$$2\pi r = l \times \propto$$

(زاویه بر حسب رادیان) $\times \frac{1}{2} r^2$ = مساحت قطاع

$$= \frac{1}{2} l^2 \times \left(\frac{2\pi r}{l}\right) = \pi r l$$




روش دوم: برای آن دسته از خوانندگان این جزوه که واحد رادیان برای زاویه را نمی دانند می توان اینطور توضیح داد که

$$\frac{\text{طول کمان}}{\text{محیط دایره}}=\frac{\text{زاویه مرکزی}}{360}=\frac{\text{مساحت قطاع}}{\text{مساحت دایره}}$$

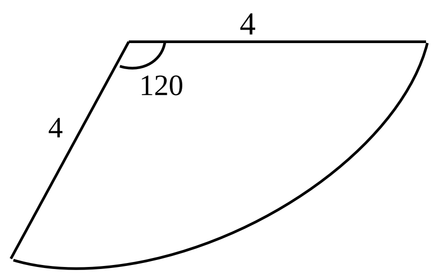
$$\frac{2\pi r}{2\pi l}=\frac{\text{مساحت قطاع}}{\pi l^2}\Rightarrow \text{مساحت قطاع}=\pi r l$$

---

مثال) قطاعی به شکل روبرو داریم.

الف) مساحت و محیط آن را بدست آورید؟

ب) اگر به کمک این قطاع مخروطی بسازیم حجم و مساحت جانبی مخروط را بدست آورید؟




پاسخ:

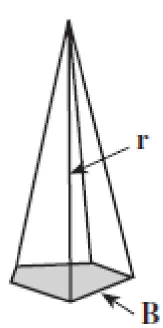
---

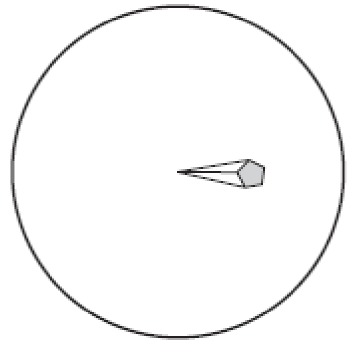
## محاسبه حجم کره به کمک مساحت ان و بالعکس

فرض کنید سطح کره را به تعدادی زیاد چند ضلعی ریز بشکنیم. از متصل کردن محیط این چند ضلعی ها به مرکز کره هرم هایی بدست می آید که ارتفاع آنها را می توان با تقریب خوبی شعاع دایره در نظر گرفت.

مجموع حجم این هرم ها مساوی با حجم کره است.

$$\text{حجم کره}=\frac{1}{3}RS_1+\frac{1}{3}RS_2+\cdots$$
$$=\frac{1}{3}R(S_1+S_2+\cdots)$$
$$=\frac{1}{3}R(4\pi R^2)$$
$$=\frac{4}{3}\pi R^3$$

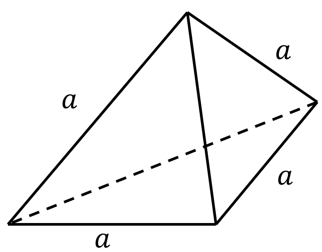


مثال) یک چهار ضلعی منتظم داریم که طول هر یال آن a است.

الف) مساحت کل این چهار وجهی منتظم را برحسب a بیابید.

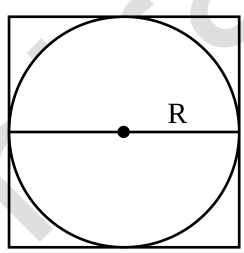
ب) حجم این چهار وجهی منتظم را برحسب a بیابید.




مثال) کره ای داخل یک مکعب محاط است. نسبت حجم کره به مکعب را بدست آورید؟

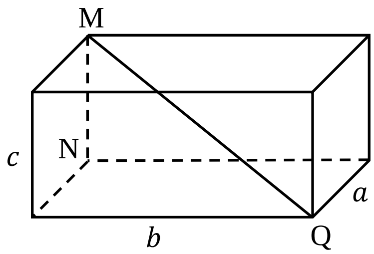
پاسخ:

$$2R = a$$




$$\frac{\text{حجم کره}}{\text{حجم مکعب}} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{(2R)^3} = \frac{\frac{4}{3}\pi}{8} = \frac{\pi}{6}$$

## مکعب مستطیل




حجم مکعب مستطیل $= abc$

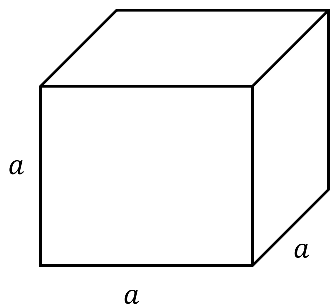
مساحت جانبی $= 2c(a+b)$

مساحت کل $= 2(ab+ac+bc)$

قطر یک وجه = قطر $NQ = \sqrt{a^2+b^2}$

قطر مکعب مستطیل $= MQ = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$

## مکعب




حجم مکعب $= a^3$

مساحت جانبی $= 4a^2$

مساحت کل $= 6a^2$

قطر هر وجه $= a\sqrt{2}$

قطر مکعب $= a\sqrt{3}$

---

## مسائل متفرقه

مثال1) مکعبی داخل یک کره محاط شده است. نسبت حجم مکعب به کره را بدست آورید؟

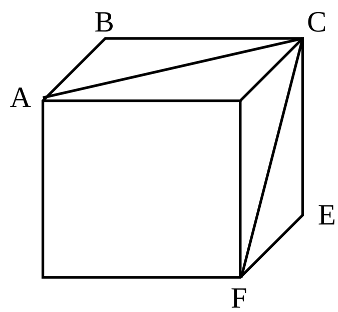
پاسخ: قطر مکعب مساوی با قطر کره است.

$$a\sqrt{3} = 2R$$

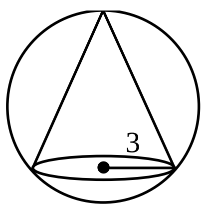
$$\frac{\text{حجم مکعب}}{\text{حجم کره}} = \frac{a^3}{\frac{4}{3}\pi(\frac{a\sqrt{3}}{2})^3} = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi \times \frac{3\sqrt{3}}{8}} = \frac{2}{\pi\sqrt{3}}$$

---

مثال2) در مکعب روبرو زاویه $A\hat{C}F$ چقدر است؟




---




مثال3) در کره ای به شعاع 5 سانتی متر، یک مخروط به شعاع قاعده 3 سانتی متر محاط شده است.
حجم مخروط چقدر است؟

پاسخ ها و راه حل کامل سوالات در نسخه اصلی فایل آورده شده است.

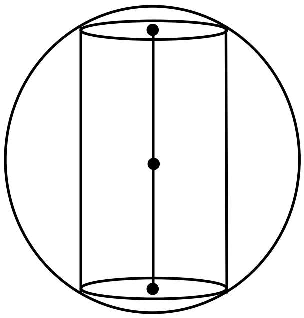
مثال4) ذوزنقه قائم الزاویه ای که قاعده های آن 10 و 20 سانتی متر و ساق قائم آن 8 باشد را حول ساق قائم آن دوران دهیم، حجم شکل حاصل را حساب کنید.

مثال 5) اگر مولد یک مخروط ناقص برابر مجموع شعاع های دو قاعده آن باشد، ثابت کنید ارتفاع مخروط ناقص دو برابر جذر حاصلضرب دو شعاع بوده و حجم آن برابر حاصلضرب سطح کل در $\frac{1}{6}$ ارتفاع است.

مثال 6) یک ورقه مستطیلی به ابعاد 3cm و 5cm داریم. نشان دهید چگونه می توان این مقوا را به سه قطعه برید بطوریکه هر تکه را بتوان فقط با تا کردن به یک جعبه مکعبی بدون در تبدیل کرد.

پاسخ:

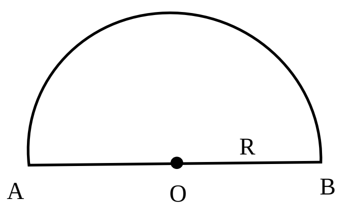
مثال7) کره ای به شعاع $R$ و استوانه ای به ارتفاع $KR$ $(0 < K < 2)$ محاط در کره مفروض اند. اولا شعاع استوانه را بر حسب $K$ و $R$ بنویسید و ثانیا ثابت کنید اختلاف حجم بین کره و استوانه عبارتست از



$$\frac{16 - 3(4 - K^2)}{12} \times \pi R^3$$

مثال8) نیم دایره مقابل را حول قطر AB به اندازه $270°$ دوران می دهیم.

مساحت جانبی و حجم شکل حاصل را محاسبه کنید.

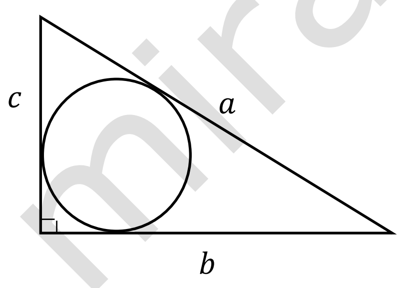



پاسخ:

$$\text{حجم} = \frac{3}{4} \times \frac{4}{3}\pi R^3 = \pi R^3$$

$$\text{سطح کل} = \frac{3}{4}(4\pi R^2) + 2\left(\frac{\pi R^2}{2}\right) = 3\pi R^2 + \pi R^2 = 4\pi R^2$$

مثال9) یک منشور با قاعده مثلث قائم الزاویه به اضلاع $c, b, a$ و ارتفاع $2R$ مفروض است.
داخل این منشور می خواهیم توپی کروی شکل چنان محاط کنیم که این توپ به وجوه منشور و همچنین به دو قاعده آن مماس باشد.

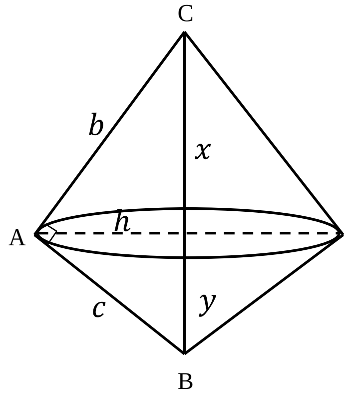



الف) $R$ را بر حسب $c, b, a$ محاسبه کنید

ب) ثابت کنید اختلاف سطح کل منشور و توپ از رابطه زیر بدست می آید.
$$3bc - \pi(b + c - a)^2$$

راه حل:

مثال10)  مثلث قائم الزاویه ABC را حول وتر BC دوران کامل می دهیم. ثابت کنید حجم حاصل از رابطه $\frac{\pi b^2 c^2}{3a}$ بدست می آید.

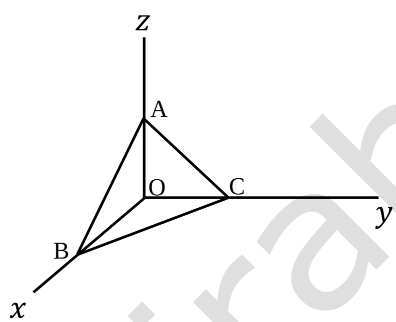



مثال11)  کره ای به شعاع $a$ در مخروطی به ارتفاع $h$ و شعاع قاعده R محاط است. ثابت کنید

$$\frac{1}{a^2}-\frac{1}{R^2}=\frac{2}{ah}$$

اثبات:

مثال12)  در شکل مقابل سه محور $ox,\ oy,\ oz$ دو بدو بر هم عمودند، در هرم OABC اندازه ارتفاع وارد از راس O بر صفحه ABC چقدر است؟




$$OA=OB=OC=1$$

پاسخ ها و راه حل کامل سوالات در نسخه اصلی فایل آورده شده است.